

Résoudre $e^x = a$ avec la calculatrice

Lien entre mathématiques et physique-chimie

Niveau : Première Spécialité / Physique-Chimie

Cadre du programme

En **Première**, la fonction logarithme n'est pas au programme de mathématiques (elle est étudiée en Terminale). Cependant, en **physique-chimie**, on a besoin de résoudre des équations du type $e^x = a$, par exemple pour déterminer une demi-vie radioactive ou le temps de charge d'un condensateur.

Ce document présente **deux méthodes** : la méthode graphique (programme de maths) et l'utilisation directe de la touche \ln de la calculatrice (admis en 1^{re}, justifié en Terminale).

1 Le problème : résoudre $e^x = a$

On cherche le nombre x tel que $e^x = a$, où a est un nombre réel **strictement positif**.

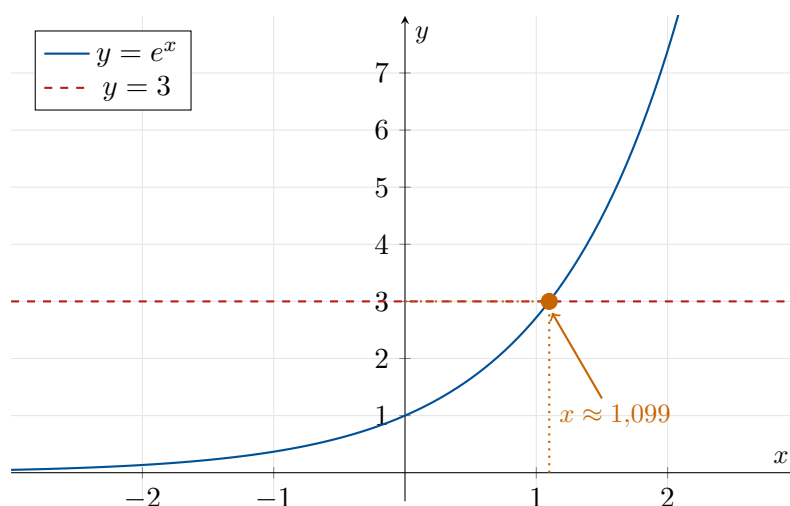
Rappel : propriétés de l'exponentielle

- La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur \mathbb{R} .
- $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (l'exponentielle est toujours positive).
- $e^0 = 1$, $e^1 = e \approx 2,718$.

Conséquence : l'équation $e^x = a$ admet **une unique solution** si $a > 0$, et **aucune solution** si $a \leq 0$.

2 Méthode 1 : Résolution graphique (programme de Première)

Principe : On trace la courbe $y = e^x$ et la droite horizontale $y = a$. La solution est l'**abscisse du point d'intersection**.



Sur la calculatrice : méthode graphique

1. Entrer $Y_1 = e^x$ (2nde + ln pour obtenir e^x sur TI, ou SHIFT + ln sur Casio)
2. Entrer $Y_2 = 3$ (ou la valeur de a souhaitée)
3. Régler la fenêtre : par exemple $X \in [-2; 4]$, $Y \in [-1; 10]$
4. Tracer les courbes (GRAPH)
5. Utiliser l'outil **intersection** :
 - TI-83/84 : 2nde → CALC → 5:intersect
 - Casio Graph : SHIFT → G-SOLV → ISCT
 - NumWorks : aller sur le point, lire les coordonnées
6. Lire l'abscisse : c'est la solution.

Exemple : $e^x = 3 \Rightarrow x \approx 1,0986$

3 Méthode 2 : La touche ln de la calculatrice (méthode directe)

La fonction logarithme népérien (admis en Première)

La touche ln de la calculatrice donne la **fonction réciproque** de l'exponentielle.
Cela signifie que :

$$e^x = a \iff x = \ln(a) \quad (\text{pour } a > 0)$$

En pratique : si $e^x = a$, alors $x = \ln(a)$. On tape directement ln(a) sur la calculatrice.

Sur la calculatrice : touche ln

La touche ln est présente sur **toutes les calculatrices scientifiques**.

Équation	Frappe calculatrice	Résultat
$e^x = 3$	ln(3)	$x \approx 1,0986$
$e^x = 0,5$	ln(0.5)	$x \approx -0,6931$
$e^x = 1$	ln(1)	$x = 0$ (exact)
$e^x = e$	ln(e) ou ln(2.718...)	$x = 1$ (exact)
$e^{-2x} = 0,3$	ln(0.3)/(-2)	$x \approx 0,6020$

Attention : ln n'accepte que des nombres **strictement positifs**. Si $a \leq 0$, l'équation $e^x = a$ n'a pas de solution.

Équations plus complexes : $e^{f(x)} = a$

Si l'inconnue est dans l'exposant sous une forme plus complexe, on procède en deux temps :

1. On applique ln des deux côtés : $f(x) = \ln(a)$
2. On résout l'équation obtenue.

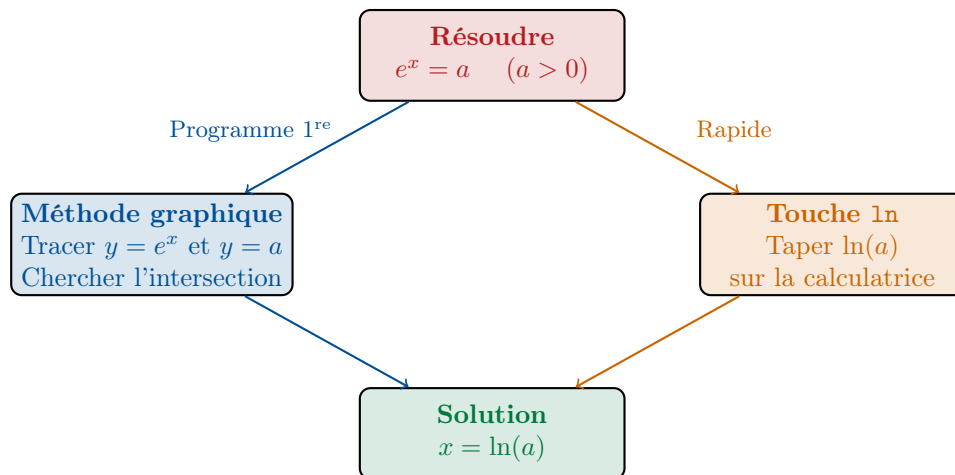
Exemples :

$$e^{3x} = 7 \implies 3x = \ln(7) \implies x = \frac{\ln(7)}{3} \approx 0,6486$$

$$e^{-0,5t} = 0,2 \implies -0,5t = \ln(0,2) \implies t = \frac{\ln(0,2)}{-0,5} \approx 3,219$$

$$5e^{2x} = 15 \implies e^{2x} = 3 \implies x = \frac{\ln(3)}{2} \approx 0,5493$$

4 Résumé visuel des deux méthodes



5 Applications en physique-chimie

5.1 Décroissance radioactive et demi-vie

Décroissance radioactive

Le nombre de noyaux radioactifs restants à l'instant t est :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

où N_0 est le nombre initial de noyaux et λ la **constante radioactive** (en s^{-1}).

Problème typique : Déterminer la **demi-vie** $t_{1/2}$, c'est-à-dire le temps au bout duquel il reste la moitié des noyaux.

Résolution :

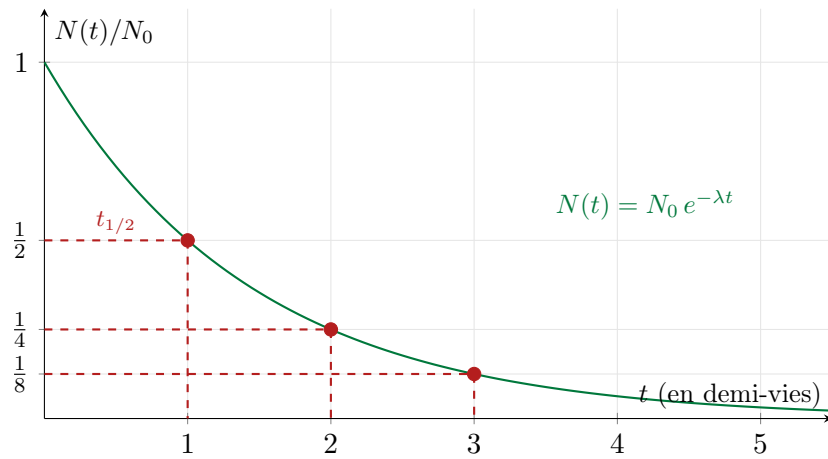
$$\begin{aligned} N(t_{1/2}) &= \frac{N_0}{2} \\ N_0 e^{-\lambda t_{1/2}} &= \frac{N_0}{2} \\ e^{-\lambda t_{1/2}} &= \frac{1}{2} = 0,5 \\ -\lambda t_{1/2} &= \ln(0,5) \quad (\text{touche ln : } \ln(0,5) \approx -0,6931) \\ t_{1/2} &= \frac{-\ln(0,5)}{\lambda} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \end{aligned}$$

Calcul numérique

Exemple : Le carbone 14 a une constante radioactive $\lambda = 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$.

Sur la calculatrice : $\ln(2) / 1.21E-4 = 5730$ ans.

La demi-vie du carbone 14 est d'environ **5 730 ans**.



5.2 Circuit RC : charge et décharge d'un condensateur

Décharge d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur lors de sa décharge dans un circuit RC est :

$$u_C(t) = U_0 e^{-t/\tau}$$

où $\tau = RC$ est la **constante de temps** du circuit (en secondes).

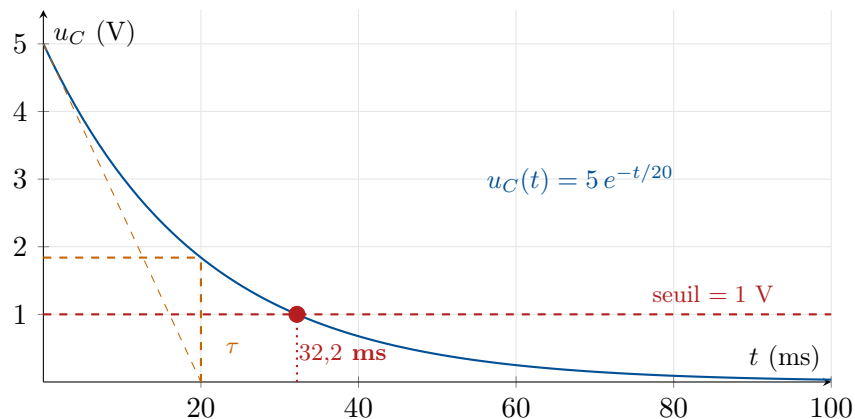
Problème typique : À quel instant la tension vaut-elle 1 V sachant que $U_0 = 5$ V et $\tau = 0,02$ s ?

Résolution :

$$\begin{aligned} 5 e^{-t/0,02} &= 1 \\ e^{-t/0,02} &= \frac{1}{5} = 0,2 \\ \frac{-t}{0,02} &= \ln(0,2) \\ t &= -0,02 \times \ln(0,2) \end{aligned}$$

Calcul numérique

Sur la calculatrice : $-0.02 * \ln(0.2) \approx 0,0322$ s = 32,2 ms.



Remarque : La constante de temps τ est le temps au bout duquel la tension a été divisée par $e \approx 2,718$, car $u_C(\tau) = U_0 e^{-1} \approx 0,368 \times U_0$.

5.3 Datation au carbone 14

Principe de la datation

On mesure la proportion de carbone 14 restante dans un échantillon. Si on trouve que $N(t)/N_0 = r$ (par exemple $r = 0,72$), alors l'âge de l'échantillon est :

$$t = \frac{-\ln(r)}{\lambda} = -t_{1/2} \times \frac{\ln(r)}{\ln(2)}$$

Exemple : Un échantillon de bois contient 72 % de son carbone 14 initial. Quel est son âge ?

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t} &= 0,72 \\ -\lambda t &= \ln(0,72) \\ t &= \frac{-\ln(0,72)}{\lambda} = \frac{-\ln(0,72)}{1,21 \times 10^{-4}} \end{aligned}$$

Calcul

$-\ln(0,72) / 1,21E-4 \approx 2715$ ans.
L'échantillon a environ **2 700 ans** (vers 700 av. J.-C.).

6 Exercices

Exercice 1 – Équations de base

Résoudre à la calculatrice (touche **ln**) :

- $e^x = 5$
- $e^x = 0,1$
- $e^{2x} = 7$
- $e^{-3x} = 0,4$
- $4e^x = 20$
- $e^{x-1} = 2$

Exercice 2 – Décroissance radioactive

L'iode 131, utilisé en médecine nucléaire, a une demi-vie $t_{1/2} = 8,02$ jours.

- Calculer la constante radioactive λ .
- Exprimer $N(t)$ en fonction de N_0 , λ et t .
- Au bout de combien de jours reste-t-il 10 % de l'iode initial ?
- Après combien de demi-vies reste-t-il moins de 1 % ?

Exercice 3 – Circuit RC

Un condensateur de capacité $C = 100 \mu\text{F}$ est chargé sous $U_0 = 12 \text{ V}$ puis se décharge dans une résistance $R = 1 \text{ k}\Omega$.

- Calculer la constante de temps $\tau = RC$.
- À quel instant t_1 la tension vaut-elle 6 V ?
- À quel instant t_2 la tension vaut-elle 1 V ?
- Vérifier que $u_C(5\tau) < 0,1 \text{ V}$ (le condensateur est "déchargé").

Exercice 4 – Datation

Un papyrus ancien contient 64 % de son carbone 14 initial ($\lambda = 1,21 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$).

- Poser l'équation à résoudre.
- Résoudre avec la touche **ln**.
- À quelle époque ce papyrus a-t-il été écrit ?

7 Corrigés

Exercice 1

- $x = \ln(5) \approx 1,609$
- $x = \ln(0,1) \approx -2,303$
- $2x = \ln(7)$, donc $x = \frac{\ln 7}{2} \approx 0,973$
- $-3x = \ln(0,4)$, donc $x = \frac{\ln(0,4)}{-3} \approx 0,305$
- $e^x = 5$, donc $x = \ln(5) \approx 1,609$
- $x - 1 = \ln(2)$, donc $x = 1 + \ln(2) \approx 1,693$

Exercice 2

- $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{8,02} \approx 0,08643 \text{ j}^{-1}$
- $N(t) = N_0 e^{-0,08643 t}$
- $e^{-\lambda t} = 0,1 \Rightarrow t = \frac{-\ln(0,1)}{\lambda} \approx 26,6$ jours
- $(\frac{1}{2})^n < 0,01 \Rightarrow n > \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,5)} \approx 6,64$, soit $n = 7$ demi-vies.

Exercice 3

- a) $\tau = RC = 1000 \times 100 \times 10^{-6} = 0,1 \text{ s}$
b) $e^{-t_1/0,1} = 0,5 \Rightarrow t_1 = -0,1 \ln(0,5) \approx 0,069 \text{ s}$
 $= 69 \text{ ms}$
c) $e^{-t_2/0,1} = 1/12 \Rightarrow t_2 = -0,1 \ln(1/12) \approx$
 $0,249 \text{ s}$
d) $u_C(5\tau) = 12 e^{-5} \approx 12 \times 0,0067 \approx 0,081 \text{ V}$

$< 0,1 \text{ V} \checkmark$

Exercice 4

- a) $e^{-\lambda t} = 0,64$
b) $t = \frac{-\ln(0,64)}{1,21 \times 10^{-4}} \approx 3689 \text{ ans}$
c) $2026 - 3689 \approx -1663$, soit vers **1663 av. J.-C.**