

Exercice 1 : Les chaussettes assorties.

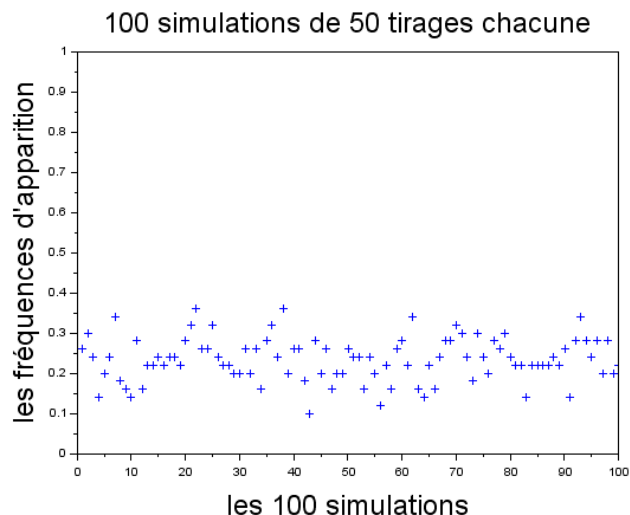
Tom a dans le tiroir de sa commode un certain nombre de chaussettes grises et de chaussettes bleues, en vrac. Lorsqu'il en tire deux au hasard dans l'obscurité, l'une après l'autre, **une fois sur deux, elles sont grises toutes les deux**.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de chaussettes contenues dans son tiroir.

1. Dans un premier temps, Tom suppose qu'avec 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises dans son tiroir, la probabilité d'obtenir deux chaussettes grises serait $p = 0,5$.

Pour tester son hypothèse, il réalise par ordinateur une simulation de 50 tirages de deux chaussettes, l'une après l'autre, dans un tiroir contenant 10 grises et 10 bleues.

Avec cet échantillon, il calcule la fréquence des couples formés de deux chaussettes grises. Puis, il répète 100 fois cette simulation et obtient le nuage de points ci-contre.



Selon vous, les résultats obtenus valident-ils l'hypothèse de Tom ?

2. On note g le nombre de chaussettes grises et b le nombre de chaussettes bleues dans le tiroir. On note p la probabilité que les deux chaussettes soient grises.
 - a) Montrer que dans le cas $b = 4$ et $g = 12$ on a $p = 0,55$.
 - b) Calculer p lorsque $b = 7$ et $g = 18$.
 - c) Dans cette question, Tom sait que le tiroir contient 204 chaussettes bleues. Il se demande combien il doit avoir de chaussettes grises pour que la probabilité de tirer deux grises soit égale à 0,5. Calculer g lorsque $b = 204$ et $p = 0,5$.
3. Sachant que Tom a moins de 250 chaussettes bleues, trouver toutes les répartitions possibles de chaussettes grises et bleues qui conduisent à $p = 0,5$.
4. Finalement, Tom n'a, dans son tiroir, que des **paires** de chaussettes à doigts. Il lui faut donc trouver une chaussette grise gauche pour le pied gauche et une chaussette grise droite pour le pied droit.

En tirant deux chaussettes au hasard de son tiroir, est-il possible que la probabilité d'obtenir une paire de chaussettes grises (une pour le pied gauche et une pour le pied droit) soit égale à 0,5 ?

Une histoire d'encerclement de pièces.

Les constructions doivent être réalisées sur la feuille donnée en annexe, à rendre avec la copie.

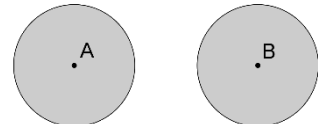
Partie A : Encercler sans déplacer les pièces.

On considère n pièces de 1 euro posées sur une table.

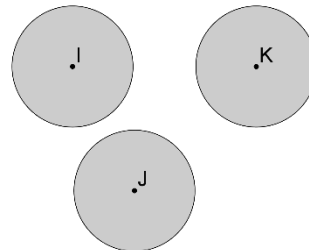
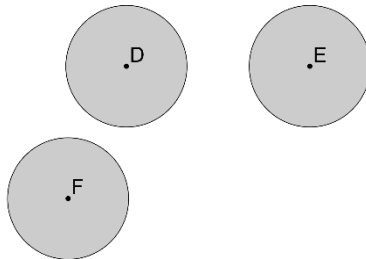
On modélise la position de ces pièces par une configuration dans le plan de n cercles de rayon 1 deux à deux disjoints ou tangents mais non sécants.

On cherche à tracer un cercle aussi petit que possible contenant les n pièces.

1. **Cas où $n = 2$** : Justifier qu'il existe un cercle de rayon minimal contenant les deux pièces puis le construire sur la figure 1 donnée en annexe.



2. **Cas où $n = 3$** : On pose trois pièces sur la table. Expliquer comment construire un cercle de rayon minimal contenant les trois pièces dans chacun des cas suivants, puis tracer ces cercles sur les figures 2 et 3 données en annexe.



Partie B : Encercler au mieux en déplaçant les pièces.

Dans cette partie on cherche à disposer les n pièces de telle façon qu'elles ne se chevauchent pas et qu'elles soient toutes contenues dans un cercle de rayon aussi petit que possible.

Conjecturer les dispositions répondant à la question pour deux, trois, quatre, cinq puis six pièces.

Partie C : Calcul du rayon minimal.

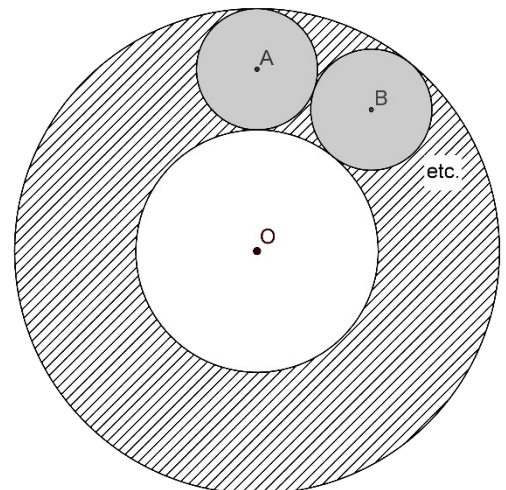
1. On donne deux cercles de même centre et de rayons respectifs $r = 2$ et $R = 4$.

Combien de cercles de rayon 1 peut-on mettre à l'intérieur de la couronne hachurée de telle sorte que les cercles ne se chevauchent pas ?

2. Soit r un réel strictement positif. On donne deux cercles de même centre et de rayons respectifs r et $r+2$.

À partir de quelle valeur de r peut-on placer cinq cercles de rayon 1 à l'intérieur de la couronne ?

3. Calculer les rayons des cercles conjecturés dans la partie B.



Annexe de l'exercice 3 à rendre avec la copie.

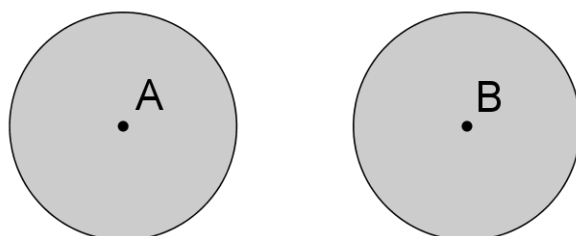


Figure 1

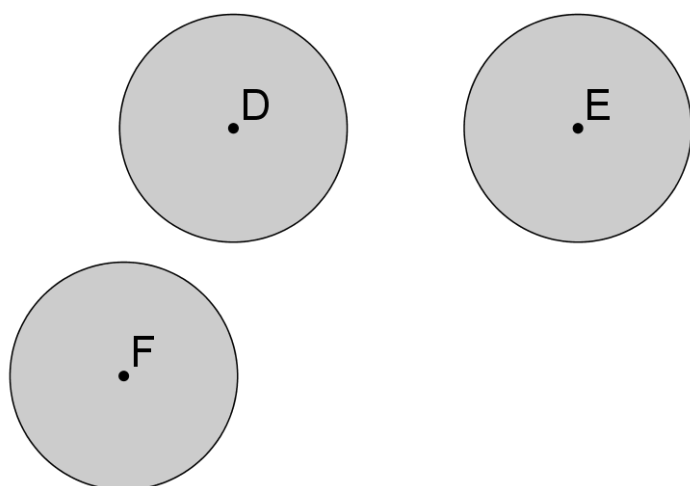


Figure 2

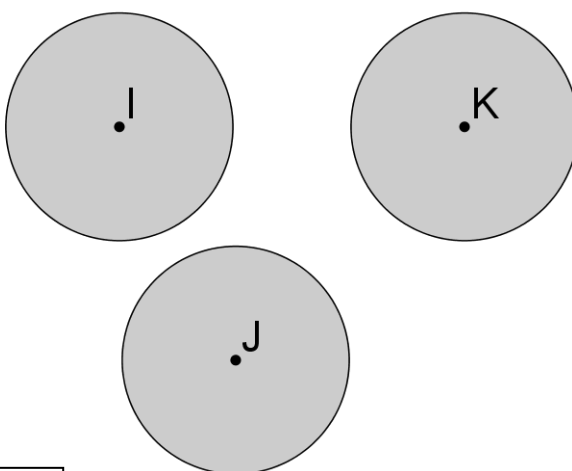


Figure 3