

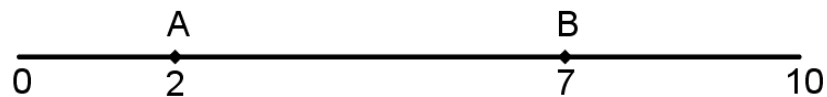
Exercice 2 Toutes séries : La baguette de pain ou le modèle de Hotelling

Partie A: Deux boulangeries A et B sont situées sur une route de 10 km de longueur. Dans cette région, la population dont l'effectif total est de 1001 personnes est répartie le long de cette route à raison d'un habitant tous les dix mètres avec une personne à chaque extrémité. Chaque personne achète quotidiennement une baguette de pain dans l'une des deux boulangeries de manière à ce que ce soit le plus économique financièrement, en tenant compte des frais de déplacement aller-retour depuis la résidence de la personne.

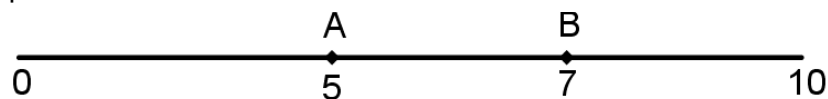
Les coûts de transports sont de 5 centimes par kilomètre.

Le coût de fabrication supporté par chaque boulangerie est de 30 centimes par baguette de pain.

1. On suppose que les boulangeries A et B sont situées respectivement à 2 km et 7 km d'une même extrémité de la route et vendent leurs baguettes de pain 1 € et 1,2 € respectivement.



- a) Monsieur Castanier habite à 3 km et 2 km respectivement des boulangeries A et B. Dans quelle boulangerie doit-il acheter sa baguette de pain afin que cela soit financièrement le plus économique pour lui ?
 - b) Existe-t-il une position pour laquelle une personne peut choisir indifféremment la boulangerie A ou B pour acheter sa baguette de pain ? Si oui, on supposera par la suite que celle-ci choisit la boulangerie la plus proche.
 - c) Quel est le bénéfice journalier réalisé pour chaque boulangerie ?
2. Pour gagner de la clientèle, le boulanger A décide de déménager et de se mettre à mi-chemin. Le prix de vente d'une baguette de pain pour la boulangerie est inchangé, c'est-à-dire 1€ l'unité. La boulangerie B reste au même endroit mais change le prix de vente de la baguette de pain.



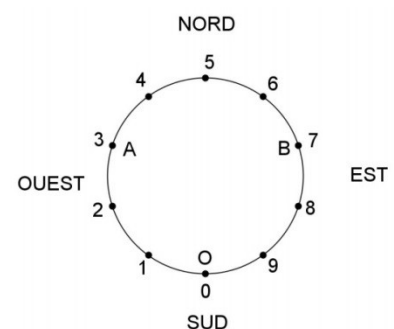
On suppose, pour des raisons économiques et commerciales, que le prix d'une baguette choisi par la boulangerie B est compris entre 1 euro et 1,5 euros.

Quel doit-être, dans la boulangerie B, le prix de vente d'une baguette de pain afin de réaliser un bénéfice maximal ? Arrondir au centime près.

Partie B :

Un périphérique sur lequel la circulation est à double sens est modélisé par un cercle de 10 km de circonférence. O est le point du périphérique le plus au sud.

Comme indiqué sur le schéma ci-contre, les boulangeries A et B sont placées le long du périphérique respectivement à 3 km et 7 km en le parcourant dans le sens des aiguilles d'une montre à partir du point O. La première boulangerie vend la baguette 1 €, tandis que la seconde la vend 1,2 €.



La population habite autour de ce périphérique et le coût de transport est de 0,05 € par km. Chaque habitant achète une baguette de pain de la manière la plus économique pour lui, en tenant compte des frais de transport aller-retour depuis sa résidence.

Existe-t-il une ou plusieurs positions sur le périphérique pour lesquelles un consommateur peut choisir indifféremment les deux boulangeries pour acheter une baguette ?

Exercice 1 : Les chaussettes assorties

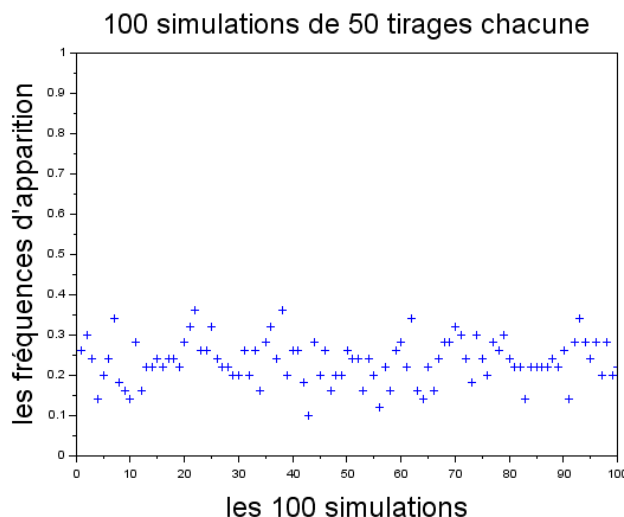
Tom a dans le tiroir de sa commode un certain nombre de chaussettes grises et de chaussettes bleues, en vrac. Lorsqu'il en tire deux au hasard dans l'obscurité, l'une après l'autre, **une fois sur deux, elles sont grises toutes les deux**.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de chaussettes contenues dans son tiroir.

1. Dans un premier temps, Tom suppose qu'avec 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises dans son tiroir, la probabilité d'obtenir deux chaussettes grises serait $p = 0,5$.

Pour tester son hypothèse, il réalise par ordinateur une simulation de 50 tirages de deux chaussettes, l'une après l'autre, dans un tiroir contenant 10 grises et 10 bleues.

Avec cet échantillon, il calcule la fréquence des couples formés de deux chaussettes grises. Puis, il répète 100 fois cette simulation et obtient le nuage de points ci-contre.



Selon vous, les résultats obtenus valident-ils l'hypothèse de Tom ?

2. On note g le nombre de chaussettes grises et b le nombre de chaussettes bleues dans le tiroir. On note p la probabilité que les deux chaussettes soient grises.
 - a) Montrer que, lorsqu'il a 4 chaussettes bleues et 12 chaussettes grises, alors $p = 0,55$.
 - b) Calculer p lorsqu'il a 7 chaussettes bleues et 18 chaussettes grises.
 - c) Dans cette question, Tom sait que le tiroir contient 204 chaussettes bleues. Il se demande combien il doit avoir de chaussettes grises pour que la probabilité de tirer deux grises soit égale à 0,5. Pour cela, il fait tourner l'algorithme ci-dessous :

Initialisation	G prend la valeur 1 P prend la valeur 0
Traitement	Tant que P < 0,5 G prend la valeur G + 1 P prend la valeur $G / (G + 204) * (G - 1) / (G + 203)$ Fin Tant que
Sortie	Afficher G, P

Quelles sont les valeurs affichées par cet algorithme en sortie ? Justifier que l'algorithme répond bien au problème de Tom.

3. Sachant que Tom a moins de 250 chaussettes bleues, trouver toutes les répartitions possibles de chaussettes grises et bleues qui conduisent à $p = 0,5$.
4. Finalement, Tom n'a, dans son tiroir, que des **paires** de chaussettes à doigts, il lui faut donc trouver une chaussette grise gauche pour le pied gauche et une chaussette grise droite pour le pied droit.

En tirant deux chaussettes au hasard de son tiroir, est-il possible que la probabilité d'obtenir une paire de chaussettes grises (une pour le pied gauche et une pour le pied droit) soit égale à 0,5 ?