



NANTES

Premier exercice

Toutes séries

Le jeu du court-circuit ¹

Énoncé

Aïssa et Paul le Poulpe jouent au jeu du court-circuit dont voici les règles :

Règles du jeu :

À chaque tour, les joueurs choisissent en secret un nombre entier entre 1 et 6, puis les valeurs choisies sont révélées simultanément.

1. Si Aïssa choisit une valeur d au moins deux points au-dessus de la valeur de Paul (par exemple 6 contre 4), elle marque le nombre de points correspondants (6 points) et Paul marque 0 point. Et inversement.
2. Si Aïssa et Paul choisissent la même valeur, ils marquent chacun 0 point.
3. Le court-circuit : Si Aïssa choisit la valeur exactement un point au-dessous de celle de Paul, elle le court-circuite : elle marque la somme des deux valeurs choisies et Paul 0. Par exemple, si elle choisit 4 et Paul 5, alors elle marque 9 points et Paul 0. Et inversement.

Le but du jeu est de marquer au moins 21 points.

Partie A : les trois premières parties

1. Voici le déroulement de leur première partie (elle a duré six coups) :

Choix d'Aïssa	6	5	5	5	6	4
Choix de Paul	4	5	4	3	4	5

Justifier qu'Aïssa remporte la partie avec 26 points contre 9.

2. Au cours de la seconde partie, Aïssa est à 13 points et Paul à 14. Au coup suivant :
 - a) Aïssa peut-elle gagner ?
 - b) Aïssa peut-elle atteindre exactement un score de 21 points ?
3. Au cours du déroulement d'une troisième partie, Aïssa est à 20 points et Paul à 10. Quel coup conseiller à Aïssa ?
Argumenter.
4. Décrire la partie la plus courte possible à ce jeu.

Partie B : Comment gagner ?

Paul est un poulpe et par conséquent il joue au hasard : il choisit sa valeur entre 1 et 6 de manière équiprobable.

Proposer une stratégie de jeu gagnante pour Aïssa. En quoi est-ce une stratégie gagnante ? Estimer le nombre de points qu'elle peut espérer gagner à chaque coup.

Partie C : Paul s'améliore

1. **Important** : Dans chaque exercice, l'utilisation d'algorithme peut constituer un élément de réponse valable qui sera valorisé par le jury, à condition de le rédiger soigneusement sur la copie et d'indiquer en détail les simulations effectuées.

Dans cette nouvelle partie, Paul choisit toujours au hasard et de manière équiprobable, mais seulement parmi les valeurs 4, 5, 6.

Existe-t-il une stratégie permettant de battre le poulpe ? Existe-t-il une stratégie meilleure que les autres ?

Partie D : Paul resserre

Soit p un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

Dans cette partie, Paul joue la valeur 5 avec probabilité p et la valeur 6 avec probabilité $1-p$.

Pour contrer cette stratégie, Aïssa décide de jouer aléatoirement 4, 5 ou 6 avec les probabilités respectives x , y et $1-x-y$, x et y désignant deux réels de l'intervalle $]0; 1[$.

Quelles sont les valeurs du couple (x, y) qui permettent de battre la stratégie du poulpe ? Existe-t-il un choix optimal ?

RETOUR AU SOMMAIRE



NANTES

Deuxième exercice

² Série S

Un jeu équitable

Énoncé

Deux personnes envisagent le jeu suivant : n boules, des boules noires et des boules blanches, indiscernables, sont placées dans un sac. Un des joueurs tire une première boule au hasard, ne la remet pas dans le sac, puis une deuxième. Il gagne une partie si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

Le but de cet exercice est de connaître le contenu d'un sac qui rende le jeu équitable, c'est-à-dire qui donne au tireur la probabilité $\frac{1}{2}$ de tirer deux boules de couleurs différentes.

On note a le nombre boules blanches dans le sac (a vérifie naturellement l'encadrement $2 \leq a \leq n$).

Quels sont, pour $n \leq 50$, les couples (a, n) rendant le jeu équitable ?

Nota bene. Les copies apportant deux solutions de natures différentes seront valorisées par le jury.

RETOUR AU SOMMAIRE

2. **Important** : Dans chaque exercice, l'utilisation d'algorithme peut constituer un élément de réponse valable qui sera valorisé par le jury, à condition de le rédiger soigneusement sur la copie et d'indiquer en détail les simulations effectuées.



NANTES

Troisième exercice

Séries autres que S³

Le nombre de Green

Énoncé

Dans cet exercice, on fixe un quadrillage et on s'intéresse aux domaines du plan délimités par un contour, à savoir une ligne polygonale fermée dont tous les côtés s'appuient sur le quadrillage.

Voici comment définir le nombre de Green du domaine correspondant à la Figure 1 : on fait le tour du domaine en partant du sommet du contour situé à gauche en haut, A dans notre exemple (Figure 2.) et on se déplace sur le contour dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre (« sens trigonométrique ») ; on compte les pas effectués en appliquant les règles suivantes : un déplacement vers le bas est compté négativement, un déplacement vers le haut est compté positivement et un déplacement horizontal, vers la gauche ou la droite, compte pour zéro. De plus, un déplacement vertical est multiplié par un coefficient entier d'autant plus élevé que l'on s'éloigne de A (Figure 2). On ajoute toutes les valeurs obtenues : $1 \times (-2) + 2 \times (-1) + 4 \times (+2) + 5 \times (+2) + 3 \times (-1) = 11$; c'est le nombre de Green du domaine de la Figure 1.

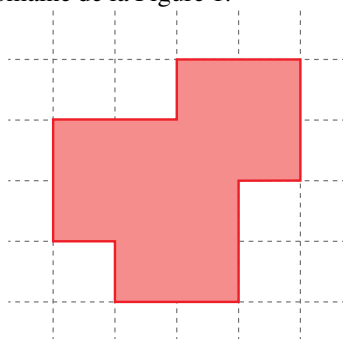


Figure 1

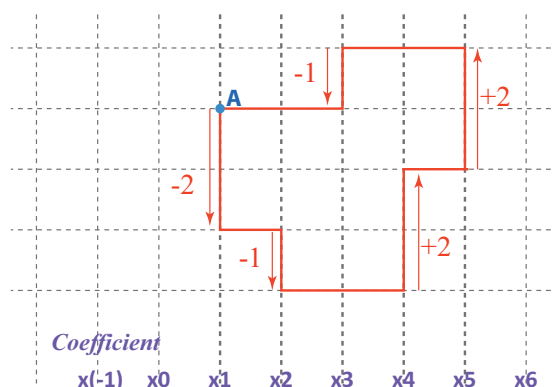


Figure 2

Questions.

1. a) Calculer le nombre de Green du domaine de la Figure 3. (cf. Annexe).
 b) Comment s'effectue le calcul sur la Figure 2. lorsque l'on change de point de départ tout en gardant les mêmes coefficients ?
 c) Dessiner sur la Figure 4. de l'annexe un domaine dont le nombre de Green vaut 7.
2. a) On **scinde** le domaine précédent selon une droite verticale du quadrillage (Figure 5.). Calculer la somme des nombres de Green de chacun des domaines obtenus et comparer au nombre de Green du domaine initial. Le résultat dépend-il de la droite verticale choisie ?
 b) La propriété est-elle conservée si on coupe avec une droite horizontale du quadrillage ?
 c) Comment définir le nombre de Green à partir d'un domaine comportant un « trou » (Figure 6.) ?
3. a) Combien vaut le nombre de Green d'un carré de côté 1 ?

3. **Important** : Dans chaque exercice, l'utilisation d'algorithme peut constituer un élément de réponse valable qui sera valorisé par le jury, à condition de le rédiger soigneusement sur la copie et d'indiquer en détail les simulations effectuées.

b) Que représente le nombre de Green ?

ANNEXE
(A remettre avec la copie)

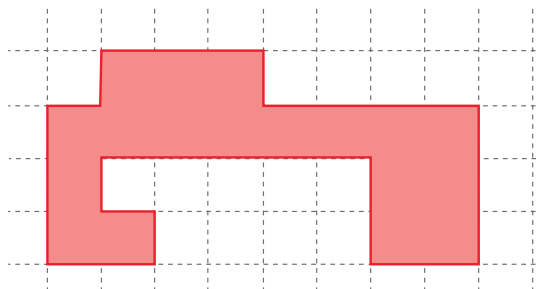


Figure 3

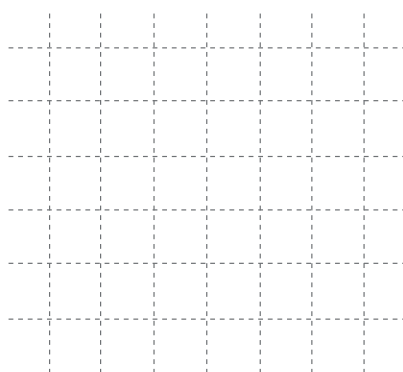


Figure 4

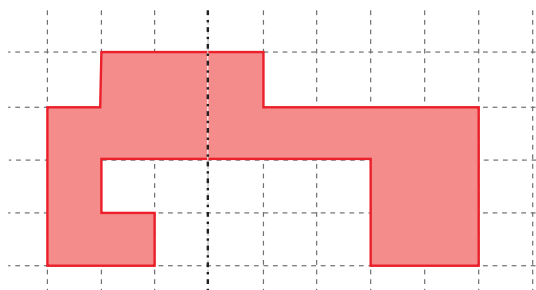


Figure 5

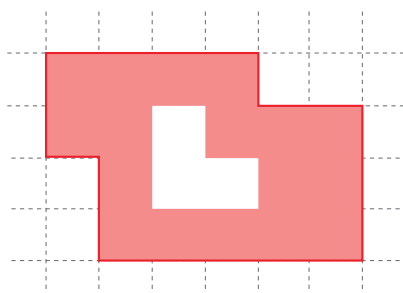


Figure 6