

SUJETS NATIONAUX

Exercice n° 1

Enoncé

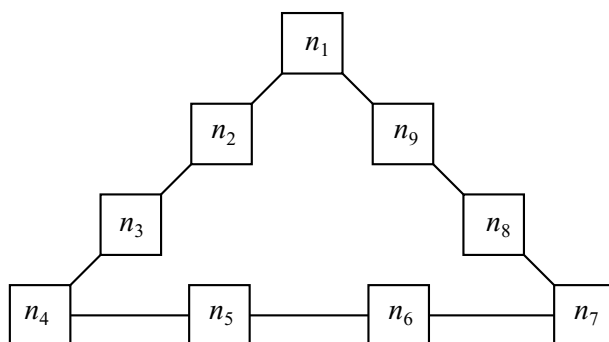
Partie A : Questions préliminaires

On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1. Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?
2. Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques

On place tous les nombres entiers de 1 à 9 dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

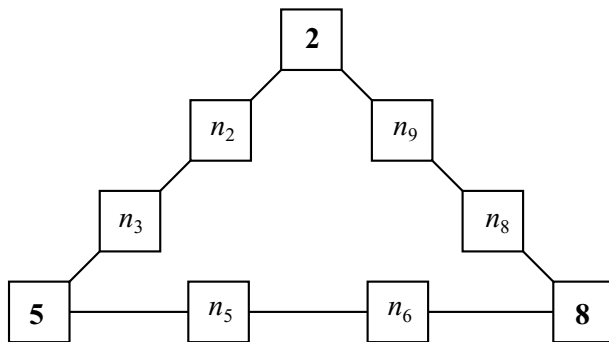


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur S , on dit que le triangle est S -magique.

(C'est à dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S .

1. Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S -magique de somme $S = 20$.



2. On considère un triangle S -magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
 - (a) Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
 - (b) En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$
 - (c) Donner la liste des couples (S, T) ainsi envisageables.
3. Proposer un triangle 17-magique.
4. Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.
5.
 - (a) Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
 - (b) Proposer un triangle 19-magique.
6. Prouver que, s'il existe un triangle S -magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$ -magique.
7. Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S -magique ?