

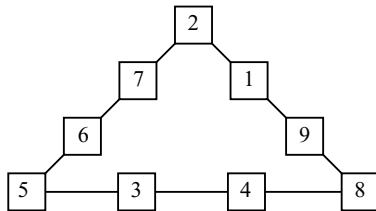
Eléments de solution

Partie A

1. Plus petite valeur : 6 ($= 1 + 2 + 3$)
2. Plus grande valeur : 14 ($= 7 + 8 + 9$).

Partie B

1. Triangle 20-magique :



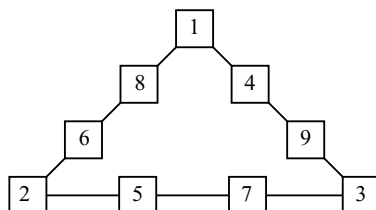
2. a)
$$3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1$$
$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + T$$

b) $\frac{6+45}{3} \leq S \leq \frac{24+45}{3}.$

c) Liste des couples (S, T) envisageables.

$(17, 6), (18, 9), (19, 12), (20, 15), (21, 18), (22, 21), (23, 24)$

3. Triangle 17-magique :



4. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.

Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors : $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 9$.

Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.

Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.

(On peut aussi envisager toutes les possibilités).

5. a) Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.

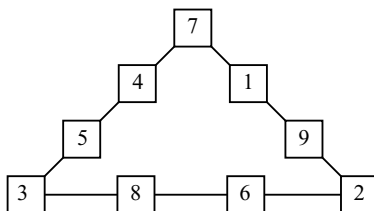
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$.

Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.

Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.

7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

b) Triangle 19-magique



6. Il suffit de remplacer chaque n par $10 - n$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7. Les valeurs de S pour lesquelles on peut trouver un triangle S -magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).

18 n'est pas S -magique. Donc 22 ne l'est pas non plus.