

Solution

1. Pour répondre à cette question, nous ne considérerons que les décompositions des entiers compris entre 4 et 10 en sommes d'entiers ne faisant pas apparaître le nombre 1, attendu que dans ces cas, la somme des inverses des termes de la somme est strictement supérieure à 1.

La seule décomposition de 4 à considérer est : $4 = 2 + 2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 4 est un bon nombre.

Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant deux 2. La seule décomposition de 5 à considérer est :

- $5 = 3 + 2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\frac{5}{6}$.
Donc 5 est mauvais.

Les décompositions de 6 à considérer sont :

- $6 = 4 + 2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\frac{3}{4}$.
- $6 = 3 + 3$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\frac{2}{3}$.
Donc 6 est mauvais.

Les décompositions de 7 à considérer sont :

- $7 = 5 + 2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\frac{7}{10}$,
- $7 = 4 + 3$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\frac{7}{12}$.
Donc 7 est mauvais.

Parmi les décompositions de 8 à considérer figure :

- $8 = 2 + 4 + 4$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1.
Donc 8 est un bon nombre.

Parmi les décompositions de 9 à considérer figure :

- $9 = 3 + 3 + 3$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1.
Donc 9 est un bon nombre.

Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant trois 3.

Parmi les décompositions de 10 figure :

- $10 = 4 + 4 + 2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1.
Donc 10 est un bon nombre.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on peut écrire : $n^2 = n + n + n + \dots + n + n$, somme de n termes. La somme de leurs inverses vaut 1. Donc n^2 est un bon nombre.

3. Si n est un bon nombre, il existe une décomposition $n = a + b + \dots + k$ telle que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{k} = 1$.

À la décomposition $2n = 2a + 2b + \dots + 2k$ est donc associée la somme $\frac{1}{2}$, et donc à la décomposition $2n + 2 = 2a + 2b + \dots + 2k + 2$ la somme 1.
 $2n + 2$ est donc un bon nombre.

La même décomposition de $2n$, associée à la décomposition $9 = 3 + 6$, conduit au résultat : $2n + 9$ est un bon nombre.