

Solution 1

1. De l'égalité $m^2 - p^2 = 8$, on déduit : $m^2 = p^2 + 8$ (*) et $m = p + 1$ ou $m = p + 2$.

Avec $m = p + 1$, (*) est impossible. Avec $m = p + 2$, il vient $p = 1$ et $m = 3$.

2. Une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que : $DC = AB - AD$; $MN = AB - 2$.

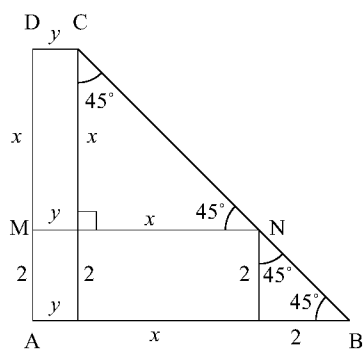
L'égalité des aires conduit alors à : $(AB - 4)^2 - (AD - AB)^2 = 8$.

On obtient avec **1.** : $AB = 7$, $AD = 6$, $DC = 1$.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC) .

Solution 2 (Abderrahim OUARDINI)

(Basée sur une idée de Floris Bakker, élève au lycée Girault de Borneil-Excideuil – 24 –)



Pour le trapèze $MNBA$, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{aire}(MNBA) &= \frac{2 \times (AB + MN)}{2} \\
 &= AB + MN \\
 &= y + x + 2 + y + x \\
 &= 2y + 2x + 2
 \end{aligned}$$

Pour le trapèze $MNCD$, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{aire}(MNCD) &= \frac{(CD + MN) \times MD}{2} \\
 &= \frac{(y + y + x) \times x}{2} \\
 &= \frac{2yx + x^2}{2}.
 \end{aligned}$$

Comme $\text{aire}(MNBA) = \text{aire}(MNCD)$, alors on a l'égalité suivante :

$$4x + 4y + 4 = 2xy + x^2,$$

qui est équivalente successivement à :

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2xy - 4x - 4y &= 4, \\
 (x + y)^2 - y^2 - 4x - 4y &= 4, \\
 (x + y)^2 - 4(x + y) - y^2 &= 4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+y-2)^2 - 4 - y^2 &= 4, \\ (x+y-2)^2 - y^2 &= 8.\end{aligned}$$

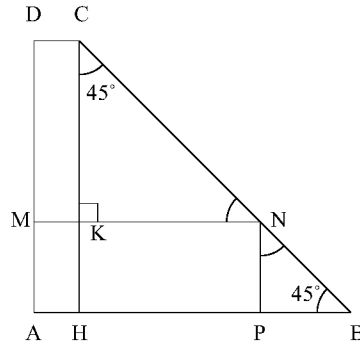
Remarquons que $x = AD - 2 \in \mathbb{N}$ et $y = AB - x - 2 \in \mathbb{N}$, donc d'après la question 1, on a : $x + y - 2 = 3$ et $y = 1$, ainsi $(x, y) = (4, 1)$.

Donc

$$AB = y + x + 2 = 5 + 2 = 7, \text{ et } AD = x + 2 = 4 + 2 = 6.$$

Solution 3 (Abderrahim OUARDINI)

(Basée sur une idée de Sylvie Almaida, élève au lycée Louis Barthou de Pau – 64 –)



La perpendiculaire passant par le point C à la droite (AB) coupe respectivement les segments $[MN]$ et $[AB]$ en K et H .

Le point P est le projeté orthogonal de N sur la droite (AB) .

Comme $\widehat{ABC} = 45^\circ$, alors le triangle CHB est rectangle isocèle en H ; il en est de même pour les triangles CKN et NPB .

On a donc :

$$DM = CK = KN = MN - MK = MN - DC.$$

Posons $DC = p$ et $MN = m$, on a :

$$\text{Aire}(MNCD) = \frac{(MN + DC) \times DM}{2} = \frac{(m + p) \times (m - p)}{2} = \frac{m^2 - p^2}{2},$$

et

$$\text{aire}(MNCD) = \frac{2^2}{2} + 2m = 2 + 2m.$$

D'où l'égalité :

$$m^2 - p^2 = 4 + 4m,$$

qui peut se réécrire sous la forme :

$$m^2 - 4m - 4 = p^2,$$

ou encore :

$$(m-2)^2 - 8 = p^2.$$

Remarquons que m est un entier naturel puisque $m = AB - 2$, donc, d'après la question 1, on a : $m - 2 = 3$ et $p = 1$, ainsi $(m, p) = (5, 1)$.

Donc :

$$AB = AP + PB = MN + AM = 5 + 2 = 7,$$

et :

$$AD = CH = HB = AB - AH = AB - DC = 7 - 1 = 6,$$

ainsi : $(AB, AD, CD) = (7, 6, 1)$.

Solution 4 (Abderrahim OUARDINI)

Munissons le plan d'un repère orthonormé $R = (A; \vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$,

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|}.$$

Désignons par $(b, 0)$, $(0, d)$, (p, q) les coordonnées respectives des points B, D, C dans le repère R . Une équation cartésienne de la droite (BC) est $x + y = b$.

Les coordonnées (x_N, y_N) du point N sont solutions du système :

$$\begin{cases} x + y = b \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b - 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

d'où $(x_N, y_N) = (b - 2, 2)$.

Les coordonnées (x_C, y_C) du point C sont solutions du système :

$$\begin{cases} x + y = b \\ y = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = b - d \\ y = d \end{cases}$$

d'où $(x_C, y_C) = (b - d, d)$.

On a :

$$\text{Aire}(ABCD) = \frac{d(b + x_C)}{2} = \frac{d(b + b - d)}{2} = \frac{d(2b - d)}{2},$$

et :

$$\text{Aire}(MNBA) = \frac{2(b - x_N)}{2} = b + b - 2 = 2b - 2.$$

Donc, on a les équivalences :

$$2\text{Aire}(MNBA) = \text{Aire}(ABCD) \Leftrightarrow 2(2b - 2) = \frac{d(2b - d)}{2} \Leftrightarrow 8b - 8 = 2bd - d^2,$$

et notre problème revient à résoudre en nombres entiers naturels l'équation : $8b - 8 = 2bd - d^2$.

Méthode 1

Remarquons que l'entier naturel d est pair, donc il s'écrit sous la forme $d = 2k$

où $k \in \mathbb{N}^*$, de plus $k \geq 3$ (car le cas $k = 2$ conduit à $8(b-1) = 8(b-2)$ ce qui est impossible) donc on a l'égalité $2b-2 = bk-k^2$, ainsi $b = \frac{k^2-2}{k-2} = \frac{k^2-4+2}{k-2} = k+2+\frac{2}{k-2}$, donc il faut que $k-2$ divise 2, donc $k = 3$ ou $k = 4$.

L'équation produit $(k-3)(k-4) = 0$ est équivalente à $k^2-2 = 7(k-2)$, donc $b = \frac{k^2-2}{k-2} = 7$, et $d = 6$ ou $d = 8$ sur la figure de la **solution 2**, on a $AN > BH$, et comme le triangle BCH est rectangle isocèle en H alors $BH = CH = AD$ donc $b > d$, ainsi $d = 6$ et $DC = x_C = b - d = 7 - 6 = 1$.

Méthode 2

L'équation $8b-8 = 2bd-d^2$ peut se réécrire sous la forme : $d^2-2bd+8b-8 = 0$, en remarquant que d^2-2bd est le début du développement de $(d-b)^2$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} d^2 - 2bd + 8b - 8 = 0 &\Leftrightarrow (d-b)^2 - b^2 + 8b - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow (d-b)^2 - [(b-4)^2 - 8] = 0 \\ &\Leftrightarrow (b-4)^2 - (b-d)^2 = 8. \end{aligned}$$

Sur la figure de la solution 2, on a :

$$b = AB = DC + KN + 2 \geq 1 + 1 + 2 = 4,$$

donc, $b-4 \in \mathbb{N}$ et $b-d \in \mathbb{N}$ d'après la **question 1** du problème, on a : $b-4 = 3$ et $b-d = 1$ ainsi $(b, d) = (7, 6)$ et $DC = x_C = b - d = 7 - 6 = 1$.

Prolongements

Abderrahim Ouardini a proposé une généralisation de ce problème dans la revue *Revista Escolar*¹ sous la forme :

« On considère le trapèze $ABCD$ rectangle en A et D de bases $[AB]$ et $[CD]$ tels que :

- $\widehat{ABC} = 45^\circ$
- $AB > CD$
- Les distances AB, AD et CD sont des nombres entiers, et $AD \geq 3$.
- M un point du segment $[AD]$ tel que la distance $AM = m$ est un entier.

La parallèle à la base $[AB]$ passant par le point M coupe le segment $[BC]$ en N

- (i) Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel m pour lesquelles les deux trapèzes $MNBA$ et $MNCD$ ont la même aire.
- (ii) Pour chaque valeur de m déterminer les dimensions correspondantes du trapèze $ABCD$ »

¹Abderrahim OUARDINI : *Revista Escolar de la OIM* - 2007.



Fondée en 1998 à l'initiative de la SMF, avec le soutien : de l'APMEP, de la SMAI, de femmes et maths, de l'Inspection Générale de maths, du CIJM, de MATH.en.JEANS... l'Association Animath réunit les acteurs de la vie mathématique française dans le but de promouvoir dans les établissements scolaires, à travers des activités périscolaires, clubs et compétitions, le plaisir de faire des mathématiques. Toutes les activités de l'association se retrouvent sur notre site très riche et régulièrement mis à jour que vous pouvez consulter à l'adresse suivante : **www.animath.fr**.

Animath s'adresse aux jeunes dans les collèges, les lycées et les universités en associant plaisir et réflexion. Deux *bibliographies* commentées pour les collégiens et pour les lycéens proposent une sélection d'ouvrages qui présentent des mathématiques contemporaines de manière originale et attrayante, souvent ludique et qui complètent utilement l'approche des programmes.

Animath agit pour développer la participation aux *compétitions mathématiques* à tous les niveaux, des rallyes mathématiques, Olympiades Académiques... aux Olympiades Internationales de mathématiques. Depuis leur création, **Animath** a été associée aux Olympiades Académiques en participant à la remise des prix nationaux et en proposant aux lauréats un stage d'été.

Permettre à des jeunes motivés d'aller plus loin et différemment de ce qui est fait dans le cadre scolaire est un des objectifs du *tutorat* mis en place pour des élèves de Seine Saint-Denis.

Les *Promenades mathématiques*, co-organisées par la S.M.F. et **Animath**, proposent un ensemble de conférences de découverte présentant de façon accessible des idées importantes. Elles ont aussi vocation à faire mieux se connaître Université et Secondaire. Ces conférences ont lieu dans les établissements scolaires à la demande des enseignants et sont données par des chercheurs.

Les *clubs* sont un excellent moyen de faire apprécier les mathématiques à tous les élèves, de leur montrer des mathématiques différentes de celles du programme et parfois proches de problèmes de recherche contemporains. Des élèves volontaires font des mathématiques pour leur plaisir et ont du temps pour en faire. Ceci développe l'autonomie des élèves, leur sens des responsabilités, leur aptitude au travail en équipe.

Animath aide les enseignants à créer un club, à l'animer et à persévérer et tente de recenser régulièrement tous les clubs existants et de les mettre en relation.

Animath participe à la formation continue des enseignants du second degré.

Les enseignants de mathématiques de collèges et de lycées sont le relais indispensable de toute formation mathématique.

Animath a organisé *trois universités d'été* dont les actes ont été publiés ou sont disponibles sur le site. Elle prépare une Université Européenne en Corse.

En 2006 et en 2007, **Animath** a organisé *un stage de formation permanente* dans le cadre du plan académique de formation de l'académie de Créteil.

Si vous souhaitez manifester votre intérêt pour nos initiatives et nous aider à les faire aboutir, adhérez et suggérez à vos élèves de nous contacter à : **animath@animath.fr**