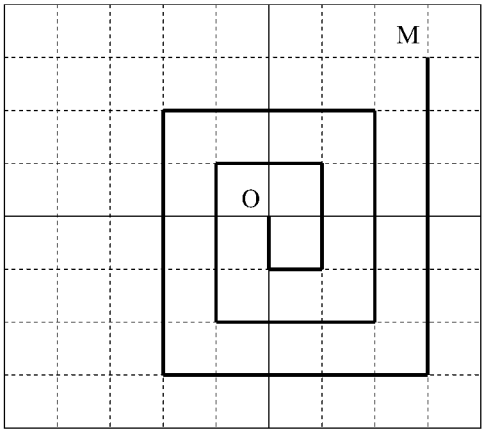
SUJETS NATIONAUX

Exercice n° 1

Enoncé

La « spirale »

Le plan muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé de droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du plan. Sur ce quadrillage, on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous. Pour tout point M à coordonnées entières, on note $\ell(M)$ la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O au point M.



1) Soit A un point de l'axe des abscisses tel que $OA = 5$.
   Déterminer les valeurs possibles de $\ell(A)$.
2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer $\ell(B)$.
3) Déterminer les coordonnées du point C tel que $\ell(C) = 2006$.
4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.