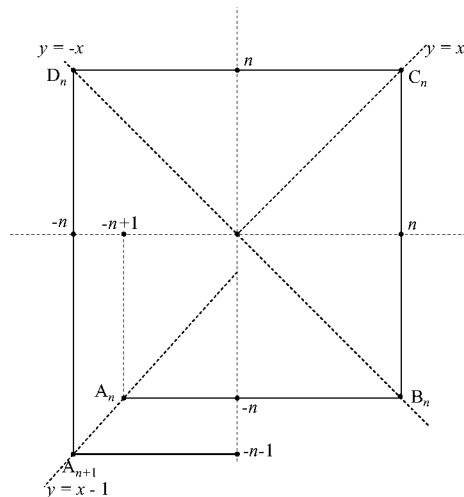


Solution 1

Commençons par des considérations générales.



Notons que la spirale est une réunion de segments dont les sommets sont situés sur trois droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 dont les équations sont simples à trouver, à savoir dans l'ordre où elles ont à intervenir : $y = x - 1$ (Δ_1), $y = -x$ (Δ_2) et $y = x$ (Δ_3).

Notons :

A_n le point de Δ_1 d'abscisse $-n$: il a pour coordonnées : $(-n + 1, -n)$.

B_n le point de Δ_2 d'abscisse $-n$: il a pour coordonnées : $(n, -n)$.

C_n le point de Δ_3 d'abscisse n : il a pour coordonnées (n, n) .

D_n le point de Δ_2 d'abscisse n : il a pour coordonnées : $(-n, n)$.

La spirale n'est alors rien d'autre que la réunion pour $n \in \mathbf{N}^*$ des segments

$$[D_{n-1}A_n], [A_nB_n], [B_nC_n] \text{ et } [C_nD_n]$$

de longueurs respectives $2n - 1$, $2n - 1$, $2n$ et $2n$.

Le point O peut être considéré comme le point D_0 .

On conjecture facilement que les points A_n et C_n sont tels que :

$$\boxed{\ell(A_n) = (2n - 1)^2} \text{ et } \boxed{\ell(C_n) = (2n)^2}$$

Démontrons-le :

$$\ell(A_n) = OA_1 + A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1 + \cdots + B_{n-1}C_{n-1} + C_{n-1}D_{n-1} + D_{n-1}A_n$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + \cdots + (2n-2) + (2n-2) + (2n-1) \\
&= 2 \cdot ((1 + 2 + 3 + \cdots + (2n-2)) + (2n-1)) \\
&= 2 \cdot \frac{(2n-1)(2n-1)}{2} + (2n-1) = (2n-2)(2n-1) + (2n-1) \\
&= (2n-1)((2n-2) + 1) = (2n-1)^2
\end{aligned}$$

et

$$\ell(C_n) = \ell(A_n) + A_n B_n + B_n C_n = (2n-1)^2 + (2n-1) + 2n = 4n^2 = (2n)^2.$$

1. Il existe deux points A de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$, l'un d'abscisse 5, l'autre d'abscisse -5.

1^{er} cas : $A(5,0)$

Ce point est sur le segment $[B_5 C_5]$; en effet, on a $B_5(5, -5)$ et $C_5(5, 5)$ avec $AC_5 = 5$.

$$\text{Ainsi } \ell(A) = \ell(C_5) - 5 = 10^2 - 5 = \boxed{95}$$

2^{ème} cas : $A'(-5, 0)$

Ce point est sur le segment $[D_5 A_6]$ ($D_5(-5, 5)$, $A_6(-5, -6)$) avec $A' A_6 = 6$.

$$\text{Ainsi } \ell(A') = \ell(A_6) - 6 = 11^2 - 6 = \boxed{115}.$$

2. $B(2005, 2006)$ est sur le segment $[C_{2006} D_{2006}]$;

en effet, on a $C_{2006}(2006, 2006)$ et $D_5(-2006, 2006)$ avec $C_{2006} B = 1$.

$$\text{Ainsi } \ell(B) = \ell(C_{2006}) + 1 = 4\,012^2 + 1 = \boxed{16\,096\,145}.$$

3. On cherche ici le point C tel que $\ell(C) = 2006$.

Or, la suite des nombres $\ell(O) = 0$, $\ell(A_1) = 1$, $\ell(C_1) = 4$, $\ell(A_2) = 9$, $\ell(C_2) = 16$, ... $\ell(A_n) = (2n-1)^2$, $\ell(C_n) = (2n)^2$ est la suite des carrés des entiers naturels (ou « carrés parfaits »).

Il suffit donc d'encadrer 2006 par deux carrés parfaits successifs :

$$\ell(C_{22}) = 44^2 = 1936 < 2006 < 2025 = 45^2 = \ell(A_{23}).$$

De plus, $C_{22} D_{22} = 44$ donc

$$\ell(D_{22}) = 1936 + 44 = 1980 < 2006 < 2025 = 45^2 = \ell(A_{23}).$$

donc $C \in [D_{22} A_{23}]$.

$$\text{Enfin : } 2006 - 1980 = 26, \text{ donc } \begin{cases} x_C = -22 = x_{D_{22}} = x_{A_{23}} \\ w_C = x_{D_{22}} - 26 = 22 - 26 = -4 \end{cases}$$

Donc C a pour coordonnées $\boxed{(-22, -4)}$

Solution 2 proposée par l'académie de Caen.

Le texte ne précise pas laquelle des deux droites passant par O doit être choisie comme axe des abscisses; il existe donc deux possibilités. Le texte ne précise pas non plus le sens des vecteurs de base; il y a donc deux possibilités pour chacun, ce qui donne huit repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Dans les figures ci-dessous, la spirale est dessinée en noir épais et les vecteurs de base en traits fins discontinus.

$n - (-n) = 2n$ puisque C_n et A'_n ont même abscisse.

En conséquence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} L(A_n) &= OB_1 + B_1A_1 + A_1C_1 + C_1A'_1 + A'_1B_2 + B_2A_2 + \cdots \\ &\quad \cdots + A_{n-1}C_{n-1} + C_{n-1}A'_{n-1} + A'_{n-1}B_n + B_nA_n \\ &= 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \cdots \\ &\quad \cdots + 2(n-1) + 2(n-1) + 2n-1 + 2n-1 \\ &= 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 2n-1) = 2 \sum_{i=1}^{2n-1} i = 2 \frac{(2n-1)2n}{2} \\ &= 2n(2n-1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L(A'_n) &= L(A_n) + A_nC_n + C_nA'(n) = 2n(2n-1) + 2n + 2n \\ &= 2n(2n-1+2) \\ &= 2n(2n+1) \end{aligned}$$

Le segment $[A'_{n-1}B_n]$ d'extrémités A'_{n-1} de coordonnées $(-(n-1), -(n-1))$ et B_n de coordonnées $(n, -(n-1))$ est formé de tous les points d'ordonnée $-(n-1)$ dont l'abscisse est comprise entre $-(n-1)$ et n . Tous ces points sont des points de coordonnées (x, y) telles que $y < 0$ et $y \leq x \leq -y+1$, ce qui peut encore s'écrire :

$$y < 0 \quad \text{et} \quad |x| \leq -y \quad \text{ou} \quad x = -y+1 \quad (\text{condition 1}).$$

Le segment $[B_nA_n]$ d'extrémités B_n de coordonnées $[n, -(n-1)]$ et A_n de coordonnées (n, n) est formé de tous les points d'abscisse n dont l'ordonnée est comprise entre $-(n-1)$ et n . Tous ces points sont des points de coordonnées (x, y) telles que $x > 0$ et $-x \leq x-1$ ou $y = x$, ce qui peut encore s'écrire :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad |y| \leq x-1 \quad \text{ou} \quad y = x \quad (\text{condition 2}).$$

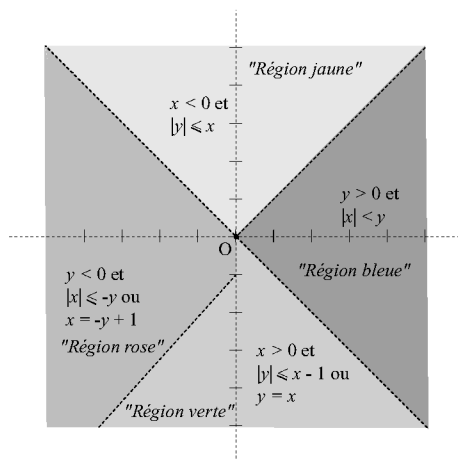
Le segment $[A_nC_n]$ d'extrémités A_n de coordonnées (n, n) et C_n de coordonnées $(-n, n)$ est formé de tous les points d'ordonnée n dont l'abscisse est comprise entre $-n$ et n . Tous ces points sont des points de coordonnées (x, y) telles que $y > 0$ et $-y \leq x \leq y$, ce qui peut s'écrire :

$$y > 0 \quad \text{et} \quad |x| \leq y \quad (\text{condition 3}).$$

Le segment $[C_nA'_n]$ d'extrémités C_n de coordonnées $(-n, n)$ et A'_n de coordonnées $(-n, -n)$ est formé de tous les points d'abscisse $-n$ dont l'ordonnée est comprise entre $-n$ et n . Tous ces points sont des points de coordonnées (x, y) telles que $x < 0$ et $-x \leq y \leq x$, ce qui peut encore s'écrire

$$x < 0 \quad \text{et} \quad |y| < x \quad (\text{condition 4}).$$

Remarque : les quatre conditions mises en évidence ci-dessus correspondent à un partage du plan en quatre parties disjointes par des demi-droites comme le montre la figure ci-dessous.



Ces considérations vont permettre maintenant de répondre très rapidement aux questions de l'exercice. Les réponses seront d'abord données dans le repère choisi puis, en fin de corrigé, dans tous les repères possibles.

1. Un point de l'axe des abscisses tel que $OA = 5$ a pour coordonnées, ou bien $(5,0)$ ou bien $(-5,0)$.

- si A a pour coordonnées $(5,0)$, comme $5 > 0$ et $|0| \leq 5$,
 $A \in [B_5 A_5]$.
Or $L(A_5) = 10 \times 9 = 90$,
donc $L(A) = L(A_5) - AA_5 = 90 - 5 = 85$.
- si A a pour coordonnées $(-5,0)$, comme $-5 < 0$ et $|0| \leq 5$,
 $A \in [C_5 A'_5]$.
Or $L(A'_5) = 10 \times 11 = 110$,
donc $L(A) = L(A'_5) - AA'_5 = 110 - 5 = 105$.

2. B a pour coordonnées $(2005, 2006)$.

Comme $2006 > 0$ et $|2005| \leq 2006$,

$B \in [A_{2006} C_{2006}]$.

$L(A_{2006}) = 2 \times 2006(2 \times 2006 - 1) = 16\,092\,132$,

donc $L(B) = L(A_{2006}) + A_{2006}B = 16\,092\,132 + 1 = 16\,092\,133$.

3. Cherchons la plus grande valeur de n telle que $L(A_n) < L(C)$.

Cette inégalité équivaut à $2n(2n-1) < 2006$ ou à $2n^2 - n - 1003 < 0$ (après division des deux membres par 2).

Le trinôme $2n^2 - n - 1003$ a pour racines $n = \frac{1 \pm 5\sqrt{321}}{4}$.

n devant être positif, l'inégalité sera vérifiée si $n < \frac{1 + 5\sqrt{321}}{4}$.

Or $22,6 < \frac{1 + 5\sqrt{321}}{4} < 22,7$. Donc la plus grande valeur de n cherchée est 22.

$L(A_{22} = 2 \times 22(2 \times 22 - 1) = 1892$ et $A_{22}C_{22} = 2 \times 22 = 44$. Donc $L(C_{22}) = L(A_{22}) + 44 = 1892 + 44 = 1936$ qui est inférieur à 2006 ; C est « plus loin » sur la spirale.

$C_{22}A'_{22} = 44$. Donc $L(A'_{22}) = L(C_{22}) + 44 = 1936 + 44 + 1980$ qui est inférieur à 2006. C est encore « plus loin » sur la spirale.

$2\,006 - 1\,980 = 26$ qui est inférieur à 46 (longueur de $[A'_{22}B_{23}]$).

Donc $C \in [A'_{22}B_{23}]$.

A'_{22} a pour coordonnées $(-22; -22)$ donc C a pour coordonnées $(-22 + 26; -22)$ soit $(4; -22)$.

4. Soit M un point quelconque dans le plan à coordonnées entières (p, q) .

Pour suivre le raisonnement ci-dessous, on se reportera à la figure précédente.

- Si M est sur l'une des demi-droites, c'est ou le point O ou l'un des points A_n, C_n, A'_n ou B_n , c'est donc un des points de la spirale.
- si M est dans la région bleue, la parallèle à (Ox) passant par $M(p, q)$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point de coordonnées (q, q) , c'est le point A_q (en effet $q > 0$), et la droite d'équation $y = -x$ au point de coordonnées $(-q, q)$, c'est le point C_q . Donc $M \in [A_qC_q]$. C'est un point de la spirale.
- si M est dans la région jaune, la parallèle à (Oy) passant par $M(p, q)$ coupe la droite d'équation $y = -x$ au point de coordonnées $(p, -p)$ c'est le point C_{-p} (en effet $p < 0$) et la droite d'équation $y = x$ au point de coordonnées (p, p) , c'est le point A'_{-p} . Donc $M \in [C_{-p}A'_{-p}]$. C'est un point de la spirale.
- si M est dans la région rose, la parallèle à (Ox) passant par $M(p, q)$ coupe la droite d'équation $y = x$ au point de coordonnées (q, q) , c'est le point A'_q (en effet $q < 0$) et la droite d'équation $y = -x + 1$ au point de coordonnées $(-q + 1, q)$, c'est le point B_{-q+1} . Donc $M \in [A'_qB_{-q+1}]$. C'est un point de la spirale.
- si M est dans la région verte, la parallèle à (Oy) passant par $M(p, q)$ coupe la droite d'équation $y = -x + 1$ au point de coordonnées $(p, -p+1)$, c'est le point B_p (en effet $p > 0$) et la droite d'équation $y = x$ au point de coordonnées (p, p) , c'est le point A_p . Donc $M \in [B_pA_p]$. C'est un point de la spirale.

La spirale passe donc bien par tous les points du plan à coordonnées entières.

Envisageons maintenant le cas des autres repères du plan.

1. Soit A le point de coordonnées $(5,0)$ dans le repère R_i où i est un nombre de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$

Repère	R_1	R_2	R_3	R_4
Coordonnées de A dans R_i	$(0,5)$	$(0,5)$	$(0,-5)$	$(0,-5)$
Segment auquel appartient A	$[A_5C_5]$	$[A_5C_5]$	$[A'_5B_6]$	$[A'_5B_6]$
$L(A)$	95	95	115	115

Repère	R ₆	R ₇	R ₈
Coordonnées de A dans R_i	(5,0)	(-5,0)	(-5,0)
Segment auquel appartient A	$[B_5A_5]$	$[C_5A'_5]$	$[C_5A'_6]$
$L(A)$	85	105	105

Soit A' le point de coordonnées (-5,0) dans le repère R_i .

Repère	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
Coordonnées de A' dans R_i	(0,-5)	(0,-5)	(0,5)	(0,5)
Segment auquel appartient A'	$[A'_5B_6]$	$[A'_5B_6]$	$[A_5C_5]$	$[A_5C_5]$
$L(A')$	115	115	95	95

Repère	R ₆	R ₇	R ₈
Coordonnées de A' dans R_5	(-5 ; 0)	(5 ; 0)	(5 ; 0)
Segment auquel appartient A'	$[C_5A'_5]$	$[B_5A_5]$	$[B_5A_5]$
$L(A')$	105	85	85

2. Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006) dans le repère R_i .

Repère	R ₁	R ₂	R ₃
Coord. de B dans R_i	(-2006,2005)	(2006,2005)	(-2006,-2005)
Segment de B	$[C_{2006}A'_{2006}]$	$[B_{2006}A_{2006}]$	$[C_{2006}A'_{2006}]$
$L(B)$	16 096 145	16 092 131	16 100 155

Repère	R ₄	R ₆
Coord. de B dans R_i	(2006,-2005)	(2005,-2006)
Segment de B	$[B_{2006}A_{2006}]$	$[B_{2006}A_{2006}]$
$L(B)$	16 088 121	16 104 167

Repère	R ₇	R ₈
Coord. de B dans R_i	(-2005,2006)	(-2005,-2006)
Segment de B	$[A_{2006}C_{2006}]$	$[A'_{2006}B_{2007}]$
$L(B)$	16 096 143	16 100 157

3. Le point C trouvé restera bien sûr le même quel que soit le repère. Seules ses coordonnées changeront suivant le repère.

C est le point de coordonnées (4,-22) dans le repère R_5 .

Repère R_i	R ₁	R ₂	R ₃	R ₄
Coord. de C dans R_i	(-22,-4)	(-22,4)	(22,-4)	(22,4)

Repère R_i	R ₆	R ₇	R ₈
Coord. de C dans R_i	(4,22)	(-4,-22)	(-4,22)

Ainsi, dans tous les cas, D est sur un des segments qui constituent la spirale.

4. Soit $D(p, q)$ un point à coordonnées entières.

Éliminons immédiatement le cas où $p = q = 0$ auquel cas $D = O$.

Notons $n = \max(|p|, |q|)$.

Si $n = |p|$ alors $|q| \leq n$ donc $-n \leq q \leq n$ et $p \in \{-n, n\}$.

Si $p = n$ alors $D(n, q)$ avec $-n \leq q \leq n$ est sur le segment $[B_nC_n]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{B_n} = x_D = n = x_{C_n} \\ y_{B_n} = -n \leq y_D \leq y_{C_n} = n \end{cases}$$

Si $p = -n$ alors $D(-n, q)$ avec $-n \leq q \leq n$ est sur le segment $[D_n A_{n+1}]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{A_{n+1}} = x_D = -n = x_{D_n} \\ y_{A_{n+1}} = -n - 1 < -n \leq y_D \leq y_{D_n} = n \end{cases}$$

Si $n \neq |p|$ alors $|p| < |q| = \max(|p|, |q|) = n$:

par suite, $|p| < n$ donc $-n < p < n$ et $q \in \{-n, n\}$.

Si $q = n$ alors $D(p, n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[C_n D_n]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{D_n} = -n < x_D = p < n = x_{C_n} \\ y_{D_n} = y_D = n = y_{C_n} \end{cases}$$

Si $q = -n$ alors $D(p, -n)$ avec $-n < p < n$ est sur le segment $[A_n B_n]$

$$\text{car } \begin{cases} x_{A_n} = -n + 1 \leq x_D = p < n = x_{B_n} \\ y_{A_n} = y_D = -n = y_{B_n} \end{cases}$$

Solution 3, proposée par l'académie de Lyon.

Pour cette solution, l'équipe académique s'est inspirée des productions et (surtout) des erreurs des élèves.

1. Il y a deux points de l'axe des abscisses tels que $OA = 5$: $A_5(5, 0)$ et $A'_5(-5, 0)$. La méthode la plus simple pour calculer $\ell(A_5)$ et $\ell(A'_5)$ est de « prolonger » la spirale et d'additionner les longueurs.

$$\ell(A_5) = (1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + 8 + 8 + 9 + 9) + 5 = 9 \times 10 + 5 = 95$$

$$\text{puis } \ell(A'_5) = \ell(A_5) + 5 + 10 + 5 = 115.$$

$$\boxed{\ell(A_5) = 95 \text{ et } \ell(A'_5) = 115}$$

2. n étant un entier naturel non nul, la spirale passe dans cet ordre par les points $A_n(n, 0)$, $E_n(n, n)$, $F_n(-n, n)$, $A'_n(-n, 0)$, $G_{n+1}(-n, -n - 1)$, $H_{n+1}(n + 1, -n - 1)$ et A_{n+1} .

On a alors : $A_n E_n = n$; $E_n F_n = 2n$; $F_n A'_n = n$ et $A'_n G_{n+1} = n + 1$.

Et on définit la spirale comme la réunion des segments $[OG_1], \dots, [G_n H_n]$, $[H_n E_n]$, $[E_n F_n]$ et $[F_n G_{n+1}]$, n étant un entier naturel non nul.

Soit $L(n + 1)$ la longueur de la portion de spirale qui va de A_n à A_{n+1} .

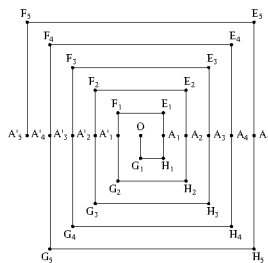
$$L(n + 1) = L(n) + 4 \times 2 \text{ (il faut ajouter 2 pour chaque coin) et } L(1) = 11.$$

$$\text{D'où } L(n) = 11 + 8(n - 1) = 3 + 8n.$$

$$\text{Or, } \ell(A_n) = 3 + L(1) + L(2) + \dots + L(n - 1)$$

$$\text{Donc } \ell(A_n) = 3 + (3 + 8 \times 1) + (3 + 8 \times 2) + \dots + (3 + 8(n - 1))$$

$$= 3n + 4(n - 1)n = 4n^2 - n \text{ (en utilisant la formule donnant la somme des premiers entiers naturels).}$$



On en déduit : $\ell(E_n) = 4n^2$; $\ell(F_n) = 4n^2 + 2n$; $\ell(A'_n) = 4n^2 + 3n$ et $\ell(G_{n+1}) = (2n+1)^2$.

Ces résultats permettent de répondre aux deux questions suivantes :

B est sur le segment $[E_{2006}F_{2006}]$ à 1 cm de E_{2006} .

Donc $\ell(B) = \ell(E_{2006}) + 1 = 4 \times 2006^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\ell(B) = 16\,096\,145}$

3. $44^2 < 2006 < 45^2$ ou $(2 \times 22)^2 < 2006 < (2 \times 22 + 1)^2$.

Ceci permet de dire que C est sur la partie de spirale qui va de E_{22} à G_{23} .

$\ell(F_{22}) = 1980$ donc C est sur $[F_{22}G_{23}]$.

$\ell(A'_{22}) = 2002$ donc C est sur $[A'_{22}G_{23}]$ à 4 cm de A'_{22} .

D'où $\boxed{C(-22, -4)}$

4. Soit $X(a, b)$ un point du plan à coordonnées entières, différent des points O et G_1 .

On cherche à prouver que X est sur un des segments :

$[G_nH_n]$ ($-n+1 \leq x \leq n$ et $y = -n$)

$[H_nE_n]$ ($x = n$ et $-n \leq y \leq n$),

$[E_nF_n]$ ($-n \leq x \leq n$ et $y = n$),

$[F_nG_{n+1}]$ ($x = -n$ et $-n-1 \leq y \leq n$), n étant un entier naturel non nul.

C'est la position de X par rapport à la droite qui contient les point H et F , la demi-droite qui contient les points E et la demi-droite qui contient les points G qui détermine le segment sur lequel se trouve X .

Si $b \geq -a$

X est « au dessus » de la droite qui contient les points H et F .

- si $b \geq a$ alors $-b \leq a \leq b$, ce qui permet de prouver que, X n'étant pas O , b est strictement positif et X est sur $[E_bF_b]$.

- si $b < a$, alors $-a \leq b \leq a$, donc a est strictement positif et X est sur $[H_aE_a]$.

si $b < -a$

X est « sous » la droite qui contient les points H et F puisque a et b sont entiers et $b \leq -a-1$

- si $b \geq a-1$, alors $a \leq b+1 \leq -a$, ce qui permet de prouver que, X n'étant pas G_1 , a est strictement négatif et X est sur $[F_{-a}G_{-a+1}]$

- si $b < a-1$, alors $b < b+1 < a < -b$, b est strictement négatif et X est sur $[G_{-b}H_{-b}]$.

$\boxed{\text{La spirale passe par tous les points à coordonnées entières du plan.}}$