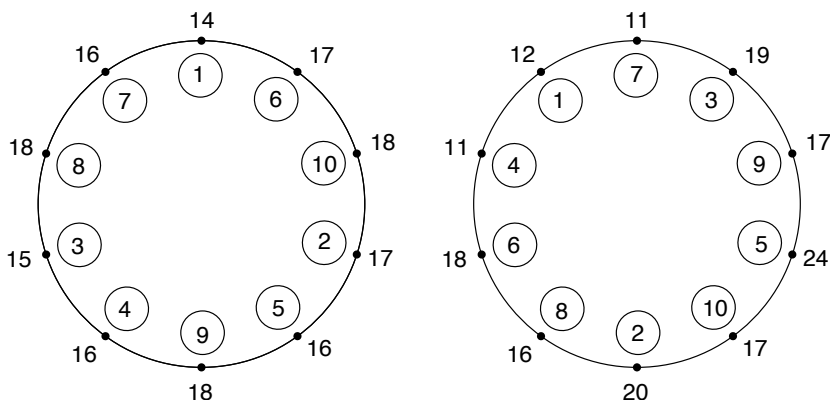


Question 1 :

- En s'en tenant scrupuleusement à l'énoncé, voici des exemples de répartition, proposés par Besançon et Cl. Baisnée :



Les jetons sont à l'intérieur et les points à l'extérieur.

La moyenne des gains est 16,5.

- Certaines réponses anticipent sur la Question 2.

Question 2 :

La somme inscrite sur chaque jeton intervient trois fois : une fois directement, pour le possesseur du jeton, et une fois pour chacun de ses voisins.

De là le total des gains :

$$3 \times (1 + 2 + \dots + 9 + 10) = 3 \times 55 = 165 \text{ (il est constant)}$$

et leur moyenne : 16,5 (donc constante).

Si personne ne recevait plus de 16 €, la moyenne serait inférieure ou égale à 16 €. Comme il n'en est pas ainsi, il y a au moins un gain strictement supérieur à 16 €, donc au moins égal à 17 €.

Question 3 :

Le premier exemple cité à la question 1 convient.

Divers jurys académiques et Animath proposent, en complément, une stratégie pour construire de telles répartitions :

On met à part le 1 et on répartit les 9 autres jetons par groupes de trois consécutifs. Soit α , β , γ , dans l'ordre décroissant, un tel groupement. La somme $\alpha + \beta + \gamma$ est le gain du joueur qui fait face à β . Donc, en exigeant que tous les gains soient inférieurs ou égaux à 18, cette condition se répercute sur les groupements par trois jetons.

Exercices nationaux

Comme, de plus, la somme 55 des points de tous les jetons est égale à $1 + 3 \times 18$, il s'ensuit que chaque $\alpha + \beta + \gamma$ est égal à 18.

Recherchons donc les partitions de 18 en trois nombres choisis de 2 à 10.

Nous obtenons :

$10 + 6 + 2$	;	$10 + 5 + 3$	;	$9 + 7 + 2$
$9 + 6 + 3$	;	$9 + 5 + 4$	;	$8 + 7 + 3$
$8 + 6 + 4$	;	$7 + 6 + 5$		

Le choix initial de $10 + 6 + 2$, par exemple, entraîne les deux autres (pas de recouvrements !)

Avec $\{10 ; 6 ; 2\}$, ce sera $\{9 ; 5 ; 4\}$ et $\{8 ; 7 ; 3\}$

Avec $\{10 ; 5 ; 3\}$, ce sera $\{9 ; 7 ; 2\}$ et $\{8 ; 6 ; 4\}$

Tandis que $\{9 ; 6 ; 3\}$ et $\{7 ; 6 ; 5\}$ ne peuvent s'associer à rien.

Dans chacune des deux associations possibles, il existe plusieurs solutions :

Ainsi, avec la première, on peut avoir la suite $1 ; 10 ; 6 ; 2 ; 9 ; 5 ; 4 ; 8 ; 3 ; 7$ (mais surtout pas $\{8 ; 7 ; 3\}$ ou la suite du premier dessin ou « la disparition symétrique par rapport au diamètre passant par 1 »). Bien vérifier si tous les gains sont inférieurs ou égaux à 18 ; la *contrainte de la partition de 18 en trois* $\{\alpha ; \beta ; \gamma\}$ est *nécessaire mais pas suffisante* ! (ainsi la suite de jetons $1 ; 10 ; 6 ; 2 ; 4 ; 9 ; 5 ; 8 ; 7 ; 3$ ne convient pas : en face du 5 le gain serait 22 et 20 en face du 8).

Question 4 :

Méthode 1 : qui utilise les trois groupements donnés, en complément, à la question 3 et que nous réexpliquons :

Supposons tous les gains inférieurs ou égaux à 17.

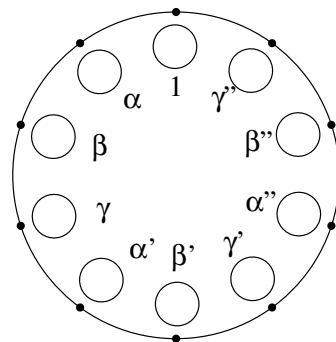
Alors $\alpha + \beta + \gamma$, qui est le gain du joueur qui fait face à β , est inférieur ou égal à 17.

De même $\alpha' + \beta' + \gamma'$ et $\alpha'' + \beta'' + \gamma''$.

Mais alors la somme des nombres des 10 jetons serait inférieure ou égale à $1 + 17 \times 3$, c'est-à-dire 52. Or elle vaut 55 !

Il existe donc nécessairement au moins un gain supérieur ou égal à 18.

Les deux exemples de la Question 1 fournissent un cas de gain maximum, égal à 18, réalisé trois fois, et un cas où il y a un gain 18 et trois gains supérieurs (19 ; 20 ; 24).



Méthode 2 :

Elle est fondée sur deux observations :

- 1 - Deux voisins ont nécessairement des gains distincts : sinon, l'un gagnant $a + b + c$, et l'autre $b + c + d$, il s'ensuivrait $a = d$, ce qui est impossible. Donc il y a au maximum cinq joueurs qui ont le même gain.

2 - Le total des gains est 165. Si l'on n'envisage pas de gain strictement supérieur à 17, ce total ne peut être atteint qu'en compensant au maximum les gains strictement inférieurs à 17. *Cela conduit à cinq gains 17 et cinq gains 16, comme condition nécessaire.*

Est-elle suffisante ?

Examinons ce qui se passe sur les jetons.

Plaçons-les dans l'ordre croissant $a_1, a_2, \dots$, le jeton a_i portant le nombre i .

Compte tenu de l'alternance des 16 et des 17, nous aurons, par exemple, $a_1 + a_2 + a_3 = 16$ ou $a_1 + a_2 + a_3 = 17$, puis, dans le premier cas $a_2 + a_3 + a_4 = 17$, ce qui donne $a_4 - a_1 = 1$. Or, déjà, $a_2 - a_1 = 1$, ce qui exigerait $a_4 = a_2$, ce qui est impossible.

Idem avec le choix $a_1 + a_2 + a_3 = 17$.

Conclusion : il est impossible qu'il n'y ait pas de gain strictement supérieur à 17 €.

Variante pour l'observation (2). (Extraite d'un corrigé diffusé, entre autres, par Besançon) :

• Supposons que le gain maximum soit 17 € et notons n le nombre de personnes gagnant 17 €. Compte tenu de la remarque précédente, on a $n \leq 5$.

Les $10 - n$ autres personnes reçoivent en moyenne, en euros,

$$\frac{165 - 17n}{10 - n} = 17 - \frac{5}{10 - n}.$$

Mais si $n < 5$, alors $17 - \frac{5}{10 - n} > 16$ ce qui n'est pas possible, ces personnes gagnant au maximum 16 € chacune, donc $n = 5$.

Enfin, quand $n = 5$, la moyenne des gains des 5 autres personnes est égale, en euros, à $17 - \frac{5}{10 - n} = 16$. Comme elles ne gagnent pas plus de 16 €, on en déduit qu'elles gagnent chacune exactement 16 €.

Variante pour la suite (même source)

En notant a, b, c , etc. les jetons dans l'ordre, a étant celui de quelqu'un qui gagne 16 €, on a :

$$\begin{cases} a + b + c = 17 \\ b + c + d = 16 \\ c + d + e = 17 \\ d + e + f = 16 \\ e + f + g = 17 \end{cases}$$

Les deux premières lignes et les deux dernières donnent respectivement $a - d = 1$ et $g - d = 1$. On en déduit $a = g$, ce qui est impossible.

GÉNÉRALISATION

(Extraite d'un corrigé diffusé par Animath, Poitiers, La Guadeloupe, ... corrigé qui suit la méthode « Besançon », aménagé par Paul-Louis HENNEQUIN)

- On peut généraliser le problème à $n = 6k - 2$ jetons : si g est le plus grand gain, on a $2 + 3 + \dots + n \leq g(n - 1) / 3$ d'où $g \geq 9k$. On peut réaliser une telle répartition, par exemple :
 $1 ; 3k, 6k - 2, 2 ; 3k - 1, 4 ; \dots ; 2k + 1, 5k - 1, 2k ;$ puis $2k - 1, 3k + 1, 4k ;$
 $2k - 3, 3k + 2, 4k + 1 ; \dots 3, 4k - 1, 5k - 2.$
- On peut montrer également que :
 - si n est pair, $g = \frac{3n}{2} + 3$
 - si n est impair, $g = \frac{3n + 7}{2}$

COMMENTAIRES

Citons d'abord Michel REGNAULT.

Un problème lié aux répartitions sur un cercle des nombres de 1 à 10, ... d'une simplicité trompeuse.

La demande d'un exemple, au départ, permet de bien voir le problème, mais plusieurs candidats ont paru troublés par la référence à un procédé aléatoire qui semblait à la fois donner un aspect probabiliste à la question et créer une difficulté... qu'il était, selon eux, sans doute indispensable de trouver dans ce type d'épreuves !

Pour Caen, ceux qui ont su montrer que la somme des gains des dix personnes vaut toujours 165, ont en général su conclure par l'absurde, mais on a pu remarquer quelques faiblesses dans le traitement des inégalités portant sur des entiers.

Un peu de stratégie, disperser les gros pour les entourer de plus petits, permet de donner rapidement l'exemple répondant à la troisième question. Par contre, établir l'impossibilité que tous les gains soient inférieurs ou égaux à 17, demande davantage de subtilité qu'au 2^{ème}, et ce dernier point n'a donc été que très rarement abordé.

La plupart des commentaires vont dans ce sens.

Toulouse signalant même que : « tout le monde est loin d'avoir vu que, quelle que soit la distribution des jetons, la moyenne était constante. Beaucoup se sont contentés du cas particulier de la question 1 ».

Nantes signale que « les trois premières questions ont souvent été bien faites, mais que la dernière n'a été justifiée correctement qu'une seule fois ».