

La solution “ officielle ” est donnée sous un titre que voici :

Existence et construction du cercle tangent à la fois : au demi cercle (C_1) de diamètre $[AB]$, au demi cercle (C_2) de diamètre $[AO]$ et à la droite (AB) .

Analyse du problème.

N.D.L.R.

- On voit aussitôt qu'il y a changement par rapport à l'énoncé : celui-ci postule l'existence du cercle « tri-tangent », alors que, dans le corrigé actuel, on s'interroge aussi sur l'existence, ce qui rend le problème à la fois plus logique et plus ardu. Nous verrons notamment que, en incorporant un problème d'existence, on s'interdit une simplification d'exposé.
- Il nous est agréable de publier cette solution : en effet, les problèmes de construction d'une figure ou de détermination d'un nombre, plus généralement d'un objet mathématique, peuvent se poser sans que l'on soit assuré de l'existence ou non d'une solution. De tels problèmes avaient été appelés « spéculatifs » par R. DONTOT.

Leur mode de traitement est depuis longtemps codifié :

1) S'il existe une solution, au moins une, à quelles conditions doit-elle **nécessairement** se plier ? C'est la partie dite « Analyse ».

2) Ces conditions nécessaires sont-elles **suffisantes** ? C'est la partie dite « Synthèse ».

C'est après cela, et après seulement, que l'on saura s'il y a des solutions.

- **Au collège**, depuis le programme de 1985, on évite, au moins en géométrie, les problèmes d'existence par des subterfuges. Ainsi : « On avait telle figure, mais une partie au moins a été effacée et on voudrait la retrouver, en sachant qu'elle

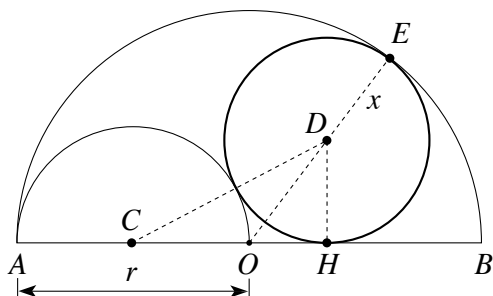
obéissait à telle ou telle condition... »

En algèbre, les équations sont des « problèmes spéculatifs », mais souvent on sait, d'après le contexte de création des « inconnues », qu'il y a des solutions. On travaille alors non pas sur des « équations », mais sur des « égalités ».

Cela dit, revenons au corrigé (fin de la N.D.L.R.).

Analyse du problème

On suppose que D est le centre d'un cercle solution. On note x le rayon de ce cercle et H son point de contact avec (AB) .



On a nécessairement : $DC = \frac{r}{2} + x$; $OD = r - x$; $DH = x$.

Les triangles DCH et DOH , tous deux rectangles en H , permettent d'écrire :

$\left(\frac{r}{2} + x\right)^2 = x^2 + \left(\frac{r}{2} + OH\right)^2$ et $(r - x)^2 = OH^2 + x^2$. On déduit successivement :

$$rx = r \times OH + OH^2 \text{ et } r^2 - 2rx = OH^2$$

$$rx = r \times OH + OH^2 \text{ et } 3 \times OH^2 + 2r \times OH - r^2 = 0.$$

L'équation $3t^2 + 2rt - r^2 = 0$ admet, dans $\mathbb{R}$, deux solutions : $-r$ et $\frac{r}{3}$.

On a nécessairement : $OH = \frac{r}{3}$ et $x = \frac{4r}{9}$

Synthèse

Soit K le point du segment $[OB]$ tel que $OK = \frac{r}{3}$ et I le point du demi-disque de

bord (C_1) tel que OKI soit rectangle en K et que $KI = \frac{4r}{9}$. Le cercle (Γ) de centre I qui passe par K est tangent en K à (AB) .

Le calcul de OI prouve que : $OI = r - \frac{4r}{9}$: (Γ) est tangent intérieurement à (C_1) .

Le calcul de CI prouve que $CI = \frac{r}{2} + \frac{4r}{9}$: (Γ) et (C_2) sont tangents extérieurement.

(Γ) est le cercle satisfaisant aux contraintes imposées.

Les points K et I sont constructibles à la règle et au compas.

COMMENTAIRES

I - • L'exercice est intéressant : il allie des configurations élémentaires à un calcul algébrique.

- Le corrigé ci-dessus est *exemplaire*, en sa recherche de conditions nécessaires, suivie d'une étude pour savoir si elles suffisent.

- Mais revenons au problème tel qu'il était posé :

Comme la recherche de conditions nécessaires ne laisse subsister qu'une possibilité, celle-ci est automatiquement réalisée, donc suffisante, dès lors que l'on est préalablement assuré - ici par l'énoncé ! - de l'existence d'une solution.

Le corrigé est donc adapté, son titre l'explicite bien, à un autre énoncé que celui proposé, énoncé qui dirait, par exemple : « Existe-t-il un cercle Γ ... S'il existe, calculer son rayon en fonction de x »

Avec cette formulation interrogative, on pourrait, certes, répondre d'emblée intuitivement (avec des schémas mentaux de positionnement du cercle cherché) par l'affirmative, mais sans rigueur d'affirmation...

Il reste qu'on ne saurait négliger cette intuition... qui, par exemple, ne saurait accepter qu'une solution...

- En toute rigueur l'énoncé proposé exige :

- 1- La recherche de conditions nécessaires (« Analyse »)

- 2- ou bien la « Synthèse » (ici « qui peut le plus peut le moins » !) ou bien - ce qui va tellement plus vite ! - le constat : « Il faut que $OH = \frac{r}{3}$ et je suis sûr - Cf.

énoncé - que la figure existe. Donc $OH = \frac{r}{3}$ est solution, est « la solution »...

II - Remarques du jury académique

« Deux ou trois candidats seulement ont traité correctement l'énoncé académique ».

PALMARÈS

Six lauréats :

1^{er} prix : Cédric BIRON lycée De Lattre de Tassigny , Vendée

2^{ème} prix : Pierre GALVIN lycée La Colinière, Loire Atlantique

3^{ème} prix : Jean-Benoît BOURGEON Immaculée Conception, Mayenne

Comme l'an passé, un bilan individuel a été dressé pour chaque copie et a été envoyé à chaque candidat.

MÉDIATISATION

Des articles relatant l'épreuve sont parus dans la presse régionale (Dans le Courrier de l'Ouest, l'article donnait l'énoncé complet de l'exercice sur les fourmis et était accompagné d'une photo montrant les candidats dans une salle).