

SOLUTION

(P.-L. Hennequin)

Première méthode

A la règle et au compas (niveau collège)

Nous allons relier A à B par deux arcs de cercle c et d tangents extérieurement : le premier c , tangent en A à “l'alignement droit” est centré en C, sur la demi-droite perpendiculaire que nous notons $[Ay)$ et passe par A. Le second, d , est centré en D sur la demi-droite $[Bu)$, de support (BU) et qui ne contient pas U, centre de l'usine.

Première solution

Choisissons C sur $[Ay)$ de sorte que B soit extérieur à c : C doit appartenir au segment $[AP]$ où P est l'intersection de $[Ay)$ et de la médiatrice de $[AB]$. Construisons avec notre compas le point E sur $[Bu')$ (symétrique de $[Bu)$) tel que $BE = AC$. On doit avoir :

$$CD = CA + BD = BE + BD = ED$$

D est donc sur la médiatrice de $[EC]$.

La figure 1 est tracée pour $AC = 2000$ m.

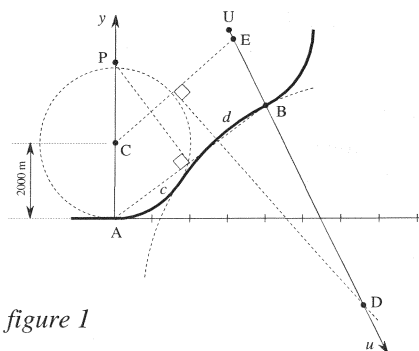


figure 1

Deuxième solution

Partons de D appartenant au segment $[BQ]$ où Q est l'intersection de $[Bu)$ et de la médiatrice de $[AB]$ puis construisons F sur $[Ay')$ tel que $AF = BD$; C doit se trouver sur la médiatrice de $[FD]$.

La figure 2 est tracée pour

$$BD = 2000 \text{ m.}$$

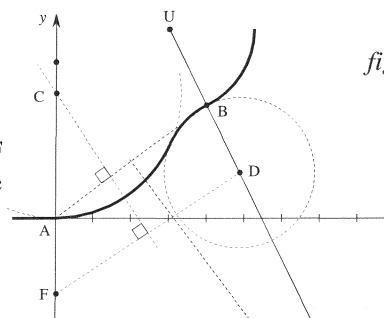


figure 2

Deuxième méthode

(Pythagore, calculs, analyse niveau première)

Choisissons un repère orthonormé (Bx, By) et prenons le kilomètre comme unité.

Posons $AC = r$ et $BD = R$; C a pour coordonnées $(-4 ; r - 3)$ et

$D\left(\frac{R}{\sqrt{5}} ; -\frac{2R}{\sqrt{5}}\right)$ et la condition de contact de c et d s'écrit : $CD = R + r$

qui équivaut à :

$$CD^2 = R^2 + r^2 + 2rR$$

avec

$$CD^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{5}} + 4\right)^2 + \left(r + \frac{2R}{\sqrt{5}} - 3\right)^2$$

ou

$$rR \left[2 - \frac{4}{\sqrt{5}} \right] + \frac{4R}{\sqrt{5}} + 6R - 25 = 0.$$

On en déduit, avec une calculatrice, le tableau ci-dessous :

R	0	1	2	2,608	2,960	3	3,336	3,737	4	4,267
r	13,975	9,5	5,879	4	3	2,890	2	1	0,380	0

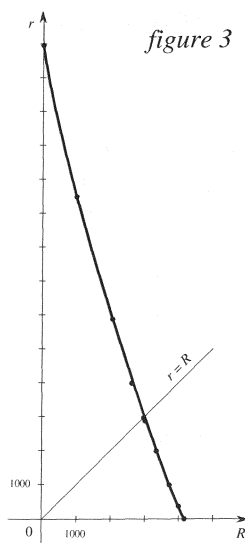
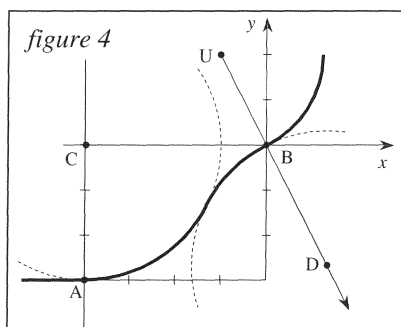
On peut représenter graphiquement r en fonction de R pour r et R positifs.

On obtient (figure 3) un arc d'hyperbole équilatère.

r est une fonction décroissante de R . Si l'on veut que la voie ferrée puisse être empruntée par des trains à grande vitesse, on a intérêt à choisir une solution $(r ; R)$ qui maximise le plus petit des deux nombres r et R . La figure 3 montre qu'il faut pour cela choisir $r = R$. En résolvant l'équation du second degré correspondante, on trouve :

$$R = r = 2,970 \ 5.$$

(cf. figure 4)



Troisième méthode

(Algèbre, niveau première)

Ayant choisi le même repère (Bx, By) et la même unité, on cherche une fonction *polynomiale* f dont la courbe représentative pour $-4 \leq x \leq 0$ soit l'arc AB.

Les conditions de contact s'écrivent :

$$f(0) = 0, f'(0) = \frac{1}{2}, f(-4) = -3, f'(-4) = 0.$$

On en déduit qu'il suffit de choisir un polynôme du troisième degré à terme constant nul :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

où a , b et c doivent satisfaire :

$$c = \frac{1}{2}$$

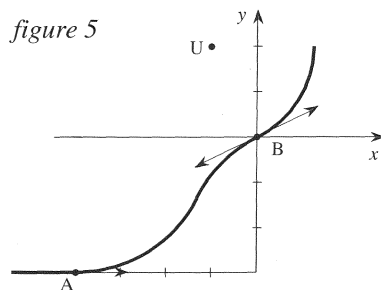
$$a(-4)^3 + b(-4)^2 + c(-4) = -3$$

$$-3a(-4)^2 + b(-4) + c = 0$$

D'où l'on déduit :

$$a = -\frac{1}{16} ; b = -\frac{16}{5} \text{ et } c = \frac{1}{2}$$

On a représenté l'arc correspondant sur la figure 5.



Commentaire

1) Le texte, simple et clair, présente une situation concrète réaliste et, circonstance rare dans notre enseignement, le problème a une infinité de solutions, ce qui laisse libre cours à l'imagination. Nous nous sommes limité à en présenter quelques-unes mais on peut en inventer d'autres (arc de sinussoïde, arcs de paraboles, deux arcs de cercles séparés par une tangente commune, ...).

2) La possession et l'utilisation d'une calculette graphique donnait un avantage certain aux concurrents.