

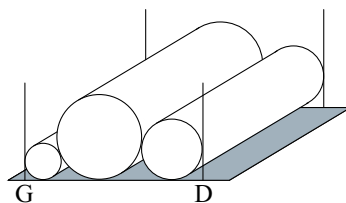
VERSAILLES

Exercice n° 1 (Série S)

Énoncé

Le tas de bois

Trois rondins cylindriques sont posés côté à côté sur une même surface plane horizontale. Sur la figure, les cercles apparents sont situés dans un même plan P perpendiculaire aux axes des cylindres. Les points G et D sont les intersections de deux droites contenues dans P , verticales et tangentes au premier et au dernier cercle.



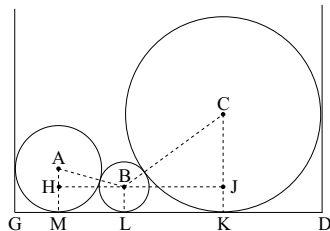
A chaque ensemble de trois rondins, dont les rayons sont notés, de gauche à droite, a , b et c , on associe la distance GD , appelée largeur et notée $\ell(a, b, c)$. On étudie cette largeur en fonction des rayons des rondins et de leur position. On se place dans le cas où le cylindre central est tangent aux deux autres et où les verticales passant par G et D ne sont au contact que d'un seul cylindre chacune.

1. Montrer que $\ell(9, 16, 36) = 117$. Calculer $\ell(16, 9, 36)$.
2.
 - a. Calculer $\ell(a, b, c)$ en fonction de a , b et c .
 - b. Calculer $\ell(b, a, c) - \ell(a, b, c)$. On pourra faire apparaître $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ en facteur.
3. On utilise dans cette question trois rondins de rayons respectifs 1, x et y . On suppose que $1 < x < y$. Dans quel ordre faut-il les placer pour que la largeur soit :
 - a. La plus grande possible ?
 - b. La plus petite possible ? *Discuter.*

Eléments de solution

La coupe selon le plan vertical passant par C et D fournit la figure ci-contre.

La largeur associée à une disposition des rondins est la somme de la distance HJ et des rayons des cercles extérieurs. La distance HJ s'obtient par application du théorème de Pythagore dans les triangles AHB et BJC rectangles respectivement en H et J (la distance des centres de deux cercles tangents extérieurement est la somme de leurs rayons).



1. $HB^2 = (16 + 9)^2 - (16 - 9)^2$; $BJ^2 = (36 + 16)^2 - (36 - 16)^2$. D'où $HB = 24$ et $BJ = 48$; et $9 + 24 + 48 + 36 = 117$.

Dans l'ordre 16, 9, 36 (celui de la figure ci-dessus) on obtient : $16 + 24 + 36 + 36 = 112$ (attention, les deux 36 ne jouent pas le même rôle).

2. Voici le calcul littéral correspondant à ce qui a été fait ci-dessus :

$$\ell(a, b, c) = a + \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2} + \sqrt{(b+c)^2 - (b-c)^2} + c$$

(noter qu'écrire $a - b$ plutôt que $b - a$ n'a pas d'influence sur le résultat).
Finalement : $\ell(a, b, c) = a + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + c$.

On calcule :

$$\ell(b, a, c) - \ell(a, b, c) = b + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + c - (a + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + c).$$

$$\text{Et donc } \ell(b, a, c) - \ell(a, b, c) = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) (2\sqrt{c} - \sqrt{a} - \sqrt{b}).$$

- 3.

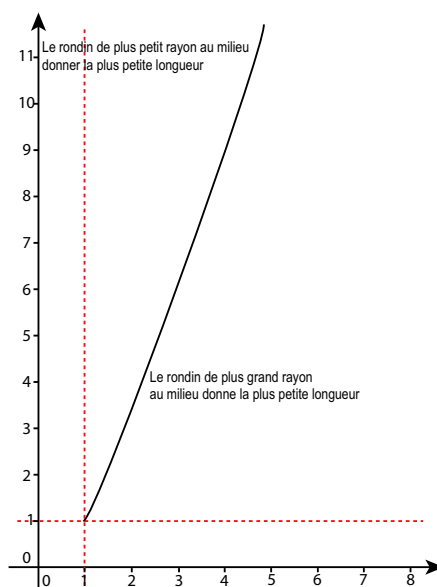
On doit comparer $\ell(1, x, y)$, $\ell(x, 1, y)$ et $\ell(1, y, x)$.

On sait que $\ell(1, x, y) - \ell(x, 1, y) = (\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{y} - \sqrt{x} - 1)$, ce qui prouve, compte tenu de l'hypothèse $1 < x < y$, que $\ell(1, x, y) > \ell(x, 1, y)$.

$\ell(1, x, y) - \ell(1, y, x) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(2 - \sqrt{x} - \sqrt{y})$, ce qui prouve, compte tenu de l'hypothèse $1 < x < y$ que $\ell(1, x, y) > \ell(1, y, x)$.

Placer les rondins de gauche à droite dans l'ordre de leurs rayons donne donc la longueur maximale.

$\ell(y, 1, x) - \ell(1, y, x) = (1 - \sqrt{y})(2\sqrt{x} - 1 - \sqrt{y})$ prouve que la différence entre la longueur obtenue en plaçant le rondin de plus petit rayon au milieu et celle obtenue en mettant celui de plus grand rayon au milieu est du signe de $\sqrt{y} - 2\sqrt{x} + 1$.



Représentation graphique de la fonction définie sur $]1, +\infty[$ qui à x associe $4x - 4\sqrt{x} + 1$.

Exercice n° 2 (Série S)

Énoncé

Moyennes de puissances de 2

Dans cet exercice, on dit qu'un entier naturel non nul est *joli* s'il peut s'écrire comme la moyenne d'un certain nombre de puissances de 2, non nécessairement distinctes.

Par exemple, 92 est *joli*, car $92 = \frac{2^7 + 2^7 + 2^7 + 2^7 + 2^5 + 2^5 + 2^5}{8}$; on a aussi :

$$92 = \frac{2^8 + 2^4 + 2^2}{3}.$$

1.
 - a. Montrer que si n est *joli*, alors $n + 1$ est *joli*.
 - b. Quel est l'ensemble des entiers *jolis* ?
 - c. Donner une décomposition de 2009 comme moyenne arithmétique d'un certain nombre de puissances de 2.
2. On dit qu'un entier naturel non nul est *superbe* s'il peut s'écrire comme moyenne arithmétique d'un certain nombre de puissances de 2, **deux à deux distinctes**.

Par exemple, 92 est *superbe*, puisque $92 = \frac{2^8 + 2^4 + 2^2}{3}$.

- a. Prouver que 7 est *superbe*.

- b. Prouver que l'entier n est *superbe* si et seulement si $2n$ est *superbe*.
 c. Prouver que 13 n'est pas *superbe* (on pourra admettre que, pour tout entier k supérieur ou égal à 7, $13k \leq 2^k - 1$).

Eléments de solution

1. Si l'entier n est *joli*, il existe un entier k et une suite de k entiers p_i tels

$$\sum_{i=1}^k 2^{p_i}$$

que $n = \frac{\sum_{i=1}^k 2^{p_i}}{k}$. Le nombre $n + 1$ s'écrit successivement :

$$\begin{aligned} n + 1 &= \frac{\sum_{i=1}^k 2^{p_i}}{k} + 1 = \frac{\sum_{i=1}^k 2^{p_i} + k}{k} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k 2^{p_i+1} + 2k}{2k} = \frac{\sum_{i=1}^k 2^{p_i+1} + 2 + \dots + 2}{2k} \end{aligned}$$

et dans ce dernier quotient, il y a bien $2k$ puissances de 2 au numérateur. Donc $n + 1$ est *joli*.

Tous les entiers sont donc *jolis*, à commencer par 1, moyenne d'une suite de puissances de 2 réduite à un seul terme. On peut écrire : $2\,009 = 1\,024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 1$.

Cette somme de (par chance) huit puissances de 2 peut s'écrire comme la moyenne de leurs huit produits par 8, qui sont aussi des puissances de 2.

2. On peut écrire : $7 = \frac{16 + 4 + 1}{3}$.

Si l'entier n est *superbe*, il existe un entier k et une suite de k entiers p_i

$$\sum_{i=1}^k 2^{p_i}$$

tous distincts tels que $n = \frac{\sum_{i=1}^k 2^{p_i}}{k}$. On a alors : $2n = \frac{\sum_{i=1}^k 2^{p_i+1}}{k}$, les $p_i + 1$ étant eux-mêmes tous distincts.

Réciproquement, dans l'expression $2n = \frac{\sum_{i=1}^k 2^{p_i+1}}{k}$, le numérateur du quotient est un entier pair (égal à $2nk$), il est donc possible de simplifier

par 2 pour obtenir $n = \frac{\sum_{i=1}^k 2^{p_i-1}}{k}$, où les $p_i - 1$ sont tous positifs ou nuls et distincts.

Dans l'égalité $13k = \sum_{i=1}^k 2^{p_i}$, où les p_i sont distincts, la plus grande

des puissances de 2 inférieures ou égales à $13k$, mettons 2^m , apparaît nécessairement, car la somme des m plus petites, $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{m-1} = 2^m - 1$ est inférieure à $13k$.

S'il est avéré que, pour tout entier k supérieur ou égal à 7, $13k < 2^k - 1$, la recherche des puissances de 2 susceptibles de participer à une suite dont la moyenne serait 13 se limite aux 7 premières. Le plus petit multiple de 13 supérieur à 64 est 65.

$5 \times 13 = 65 = 64 + 1$ ne peut être obtenu comme somme de 5 puissances de 2,

$4 \times 13 = 52 = 32 + 16 + 4$ ne le peut pas non plus (comme dit plus haut, il est illusoire de « sauter » une des puissances dont on fait la somme dans l'ordre décroissant tant que l'ajouter à la somme ne dépasse pas le nombre à atteindre),

$3 \times 13 = 39 = 32 + 4 + 2 + 1$ est une somme de quatre puissances,

$2 \times 13 = 26 = 16 + 8 + 2$ est une somme de trois termes,

Et 13 n'est pas une puissance de 2.

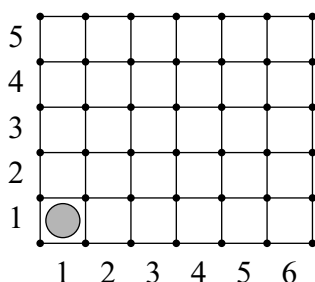
Remarque : l'assertion utilisée résulte de la comparaison de deux suites, l'une arithmétique, l'autre géométrique. Cette assertion peut être montrée par récurrence si on connaît la récurrence, mais elle peut aussi être énoncée simplement « pour les nombres supérieurs à 16, le produit par 2 augmente plus que la somme avec 13 ».

$13k$	13	26	39	52	65	78	91	104	...
2^k	2	4	8	16	32	64	128	256	...

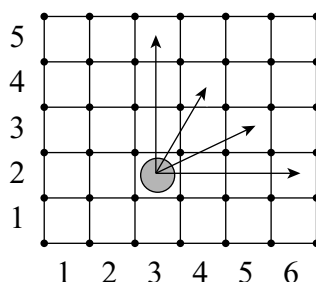
Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Énoncé

Au-delà des grilles



Damier 6 x 5
Situation de départ



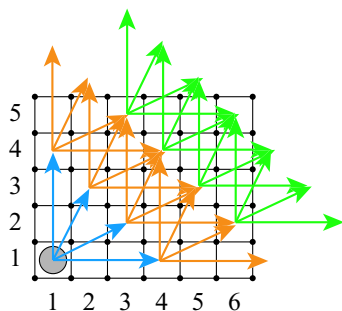
Déplacements possibles
à partir d'une position

On considère un damier rectangulaire composé de n colonnes et p lignes (on prendra $n \geq p$).

Un jeton est placé sur la première case, en bas à gauche. On le déplace dans le damier. Un mouvement consiste à déplacer le jeton de trois cases au total, vers la droite ou vers le haut (voir figure).

1. Combien faut-il au plus de mouvements pour sortir d'un damier de 6 colonnes et 5 lignes ? d'un damier de n colonnes et p lignes ?
2. On donne des entiers i et j . Est-il possible d'atteindre la case située sur la i -ième colonne et la j -ième ligne ?

Éléments de solution



Après trois mouvements (représentés en bleu, orange et vert), une seule case est encore susceptible d'être occupée dans la grille. Au maximum quatre mouvements seront donc utilisés pour sortir de la grille.

En quittant la case située sur la i -ième colonne et la j -ième ligne, notée (i, j) , le pion atteint une des cases $(i+3, j)$, $(i+2, j+1)$, $(i+1, j+2)$, $(i, j+3)$. La somme des coordonnées augmente donc de 3 à chaque mouvement.

On ne peut atteindre la case (i, j) que si $i+j-2$ est un multiple de 3 (car la case de départ est $(1, 1)$).

Exercice n° 4 (Séries autres que S)

Enoncé

« Too many notes »

Un professeur donne aux travaux que lui rendent les élèves une note, comprise entre 0 et 20, comportant une décimale au plus.

Albert, qui a obtenu **3,1** pour le premier travail rendu et **19,5** pour le second, observe que la moyenne **11,3** de ces deux notes a pour décimale le chiffre des unités de la première (**3**) et pour chiffre des unités la décimale de la première (**1**).

Béatrice, qui n'a pas encore sa seconde note, se demande s'il peut en être de même pour elle.

1. Montrer que c'est possible si sa première note est **3,2**.

2. Est-ce toujours possible pour des notes non nulles strictement inférieures à 20 ?

Eléments de solution

1. Pour obtenir une moyenne de 2,3 avec deux notes dont une est 3,2, il faut que l'autre soit 1,4.
2. Supposons la chose possible pour une certaine note N dont le chiffre des unités est u et la première décimale d . En associant à N une seconde note N' , on a réalisé une moyenne M dont le chiffre des unités est d et la première décimale u . Voyons alors ce qu'on peut faire pour la note $N + 0,1$.
 - Si la première décimale de $N + 0,1$ est $d + 1$ (cas où d n'est pas égal à 9), en ajoutant 1,9 à N' , et la somme à $N + 0,1$, on obtient un total de $2M + 2$, et donc une moyenne de $M + 1$, dont le chiffre des unités est $d + 1$ et la première décimale u . Ce raisonnement écarte deux cas : le cas où ajouter 1,9 à une note donne un total supérieur à 20, et celui où $N + 0,1$ est un entier ;
 - Cas des nombres entiers : on peut le traiter exhaustivement à part (ce qui inclut notamment le cas de 0, et permet donc de commencer le processus) ;
 - Cas des premières notes N associées à des secondes notes N' supérieures à 18,2 : dans ce cas, on peut prendre pour seconde note $N' + 1,9 - 20$. La moyenne diminue de 10, mais le chiffre des unités et la première décimale ne changent pas.