

# TOULOUSE

## Exercice n° 1 (Séries autres que S)

### Enoncé

#### Le distributeur

Des DVD de films peuvent être loués pour 24 heures à un distributeur automatique selon deux tarifs :

- 5 euros pour les « nouveautés ».
- 3 euros pour les films plus anciens.

1. Un client peut-il dépenser exactement 13 euros pour louer des DVD à ce distributeur ?
2. Un certain soir, entre 19 h et 20 h, le distributeur a enregistré une recette de 45 euros. Combien de films anciens ont-ils pu être loués pendant cette période ? Donner tous les cas possibles.
3. Le distributeur peut-il enregistrer des recettes de 101, 102, 103 euros ? Si oui comment ? Si non pourquoi ?
4. En supposant que le distributeur n'est jamais en rupture de stock, quelles sont toutes les recettes possibles ?

### Eléments de solution

1)  $13 = 2 \times 5 + 3$  : 2 nouveautés + 1 ancien

2) Oui, par exemple avec 9 nouveautés.

$m$  désignant le nombre de nouveautés et  $n$  le nombre de films anciens loués, on doit avoir  $45 = 3n + 5m$ .

Il vient  $3(15 - n) = 5m$  d'où 3 divise  $m$ . Ce qui donne :

$m = 0$  et  $n = 15$  ou  $m = 3$  et  $n = 10$  ou  $nm = 6$  et  $n = 5$  ou  $m = 9$  et  $n = 0$ .

Ce qui fait exactement quatre manières d'obtenir une recette de 45€.

**Variante** : point besoin d'algèbre ou d'arithmétique, on soustrait répétitivement de 3 et observe la présence de multiple de 5.

- 3) Ces trois recettes sont possibles. Par exemple :
- $$101 = 21 + 80 = 3 \times 7 + 5 \times 16.$$
- $$102 = 12 + 90 = 3 \times 4 + 5 \times 18.$$
- $$103 = 100 + 3 = 3 \times 1 + 5 \times 20.$$
- 4) Toutes les recettes sont possibles sauf 1 ; 2 ; 4 et 7.  
 Si  $R$  est une recette possible  $R + 3$  aussi (car  $R + 3 = 3(a + 1) + 5b$ , si  $R = 3a + 5b$ ) ; il est évident que 1, 2, 4, 7 ne sont pas des recettes possibles, 3 est possible donc aussi 6, 9, 12... ; 5 est possible donc aussi 8, 11, ... ; or 10 est aussi possible. Mais 8, 9, 10 sont trois recettes consécutives possibles donc tous les entiers suivants sont des recettes possibles. **Conclusion** : tous les entiers sauf 1, 2, 4, et 7 sont des recettes possibles.

## Exercice n° 2 (Séries autres que S)

### Enoncé

#### Ce soir, c'est la fête !

- Pour la Saint-Fiacre, un banquet de neuf couverts est prévu autour d'une table ronde. Lorsque Jean-Marie arrive, certains invités sont déjà attablés et Jean-Marie constate qu'il doit nécessairement s'installer à côté de l'un d'eux.  
 Combien y a-t-il, au minimum, d'invités déjà attablés à l'arrivée de Jean-Marie ? Décrire leurs positions respectives dans ce cas « minimal ».
- La même question se pose à l'occasion du banquet républicain de la Sainte-Barbe.  
 Quarante couverts sont disposés autour d'une table ronde et Jean-Marie, lorsqu'il arrive, est obligé de s'installer à côté d'un convive déjà attablé.  
 Combien y a-t-il, au minimum, d'invités déjà attablés à l'arrivée de Jean-Marie ? Décrire plusieurs dispositions possibles dans ce cas « minimal ».
- La légende raconte que, lorsque le barde Joachim et ses deux amis arrivèrent au dîner d'anciens de la guerre des Gaules auquel ils étaient invités, ils ne purent s'asseoir tous les trois côte à côte.  
 Sachant que la table était rectangulaire et comportait quarante couverts, vingt de chaque côté et aucun en bout de table, combien de Gaulois, au minimum, étaient déjà attablés à l'arrivée du barde et de ses amis ?  
 Présenter plusieurs dispositions des convives déjà installés dans ce cas « minimal ».

### Eléments de solution

- Il est certain qu'une personne au moins est déjà assise ; avec une deuxième, deux places restent libres entre elle et la première ; les présents sont

disposés de manière à laisser au plus deux places libres entre eux. Avec 9 couverts, cela fait 3 personnes assises, 6 places libres.

- 2) Il y a 40 couverts (3 fois 13 plus 1). Il y a 14 présents. Deux des présents peuvent être côte à côte ou bien séparés par une place libre.

N.B. : pour une table circulaire de  $n$  couverts, le nombre de convives déjà installés est  $1 + E[(n-1)/3] \dots$

- 3) Il y a 20 couverts sur un côté. Prenons un coin de table : il y a nécessairement une personne assise, une place libre ou deux places libres, on aura respectivement 7, 7, 6 présents déjà assis. On doublera pour la table entière.

Dans chacun des cas :

- avec 6 présents déjà assis : une seule disposition, ils sont séparés par deux places vides avec deux places vides à chaque coin ;
- avec 7 présents déjà assis, on peut avoir seulement :
  - six fois deux places vides, une fois une place vide, soit 7 dispositions
  - cinq fois deux places vides, trois fois une place vide, soit 56 dispositions Il y a 63 dispositions ; soit 632 pour la table entière.

N.B. : pour une table de  $2n$  couverts,  $E(n/3)$  personnes bien disposées suffisent à empêcher que le barde et ses deux amis puissent s'asseoir côte à côte.

## Exercice n° 3 (Série S)

### Enoncé

#### En Egypte

Dans l'Antiquité, les Egyptiens utilisaient essentiellement les fractions de numérateur 1 et de dénominateur un entier naturel non nul, qu'on appelle maintenant fractions égyptiennes.

Dans le problème, on s'intéresse à la possibilité d'écrire la fraction  $\frac{4}{N}$ , avec  $N$  entier naturel,  $N > 2$ , sous la forme d'une somme trois fractions égyptiennes.

On cherche donc  $a$ ,  $b$  et  $c$  entiers naturels, non nuls, tels que :  $\frac{4}{N} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .

En 1950, le mathématicien hongrois Paul ERDÖS (1913-1996) a conjecturé que cette décomposition de la fraction  $\frac{4}{N}$  était toujours possible pour  $N > 2$ .

On étudie ici ce problème pour différentes formes de l'entier  $N$ .

1. Étude du cas où  $N$  est pair,  $N > 2$ .

- (a) Trouver une décomposition de  $\frac{4}{2\,008}$  et de  $\frac{4}{2\,010}$  en somme de trois fractions égyptiennes.

- (b) Plus généralement, peut-on, pour tout entier naturel  $N$  pair,  $N > 2$ , décomposer la fraction  $\frac{4}{N}$  en somme de trois fractions égyptiennes ? Justifier.
2. Étude du cas où  $N$  est impair et de la forme  $4k - 1$  avec  $k$  entier naturel non nul.
- (a) Décomposer  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{4}{7}$ ,  $\frac{4}{11}$  en somme de trois fractions égyptiennes.
- (b) Plus généralement, peut-on, pour tout entier naturel  $N$  pouvant s'écrire  $N = 4k - 1$  avec  $k$  entier naturel non nul, décomposer la fraction  $\frac{4}{N}$  en somme de trois fractions égyptiennes ?
3. Étude de deux exemples où  $N$  est impair mais pas de la forme précédente.
- (a) Décomposer 441 en somme de trois fractions égyptiennes.
- (b) Donner plusieurs décompositions de 42 009 en somme de trois fractions égyptiennes.
4. À supposer qu'on veuille prouver que la conjecture de Paul ERDÖS est fausse, proposer des entiers naturels ou des familles d'entiers naturels auxquels on devrait encore s'intéresser.

## Eléments de solution

1. (a)  $\frac{4}{2008} = \frac{2}{1004} = \frac{1}{502} = \frac{1}{3 \times 502} + \frac{1}{3 \times 502} + \frac{1}{3 \times 502}$ .  
Cette décomposition ne marche qu'avec des multiples de 4.
- ou  $= \frac{1}{1004} + \frac{1}{1004} = \frac{1}{2 \times 1004} + \frac{1}{2 \times 1004} + \frac{1}{1004}$
- $\frac{4}{2010} = \frac{2}{1005} = \frac{1}{1005} + \frac{1}{1005} = \frac{1}{2 \times 1005} + \frac{1}{2 \times 1005} + \frac{1}{1005}$ .
- (b) *Généralisation* :  
si  $k$  entier naturel non nul :  $\frac{4}{2k} = \frac{2}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k}$ .
2. (a)  $\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$
- $\frac{4}{7} = \frac{8}{2 \times 7} = \frac{7}{2 \times 7} + \frac{1}{2 \times 7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 7}$ ,  
à partir de là, plusieurs décompositions possibles...
- $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28}$
- $= \frac{1}{2} + \frac{9}{14 \times 9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{63}$
- $= \frac{1}{2} + \frac{8}{14 \times 8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{112}$ .

$$\frac{4}{11} = \frac{4 \times 3}{3 \times 11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{33}$$

$$\text{ou} = \frac{1}{3} + \frac{1}{66} + \frac{1}{66}$$

ou = ...

(b) *Généralisation :*

$$\frac{4}{4k-1} = \frac{4k}{(4k-1)k} = \frac{4k-1}{k(4k-1)} + \frac{1}{k(4k-1)}$$

$$= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k(4k-1)} + \frac{1}{2k(4k-1)}$$

$$\text{ou} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k(4k-1)}$$

$$\text{ou} = \frac{1}{k} + \frac{4k}{4k^2(4k-1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{4k^2(4k-1)}$$

$$3. \quad (a) \quad \frac{4}{41} = \frac{1}{41} + \frac{3}{41} = \frac{1}{41} + \frac{42}{14 \times 41} = \frac{1}{41} + \frac{1}{14} + \frac{1}{41 \times 14}$$

On a aussi :

$$\frac{4}{41} = \frac{48}{12 \times 41} = \frac{41}{12 \times 41} + \frac{41}{12 \times 41}$$

$$= \frac{1}{k} + \frac{1}{2k(4k-1)} + \frac{1}{2k(4k-1)}$$

$$\text{ou} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3 \times 41} + \frac{1}{4 \times 41}.$$

(b) Pour  $\frac{4}{2009}$ , on peut utiliser les décompositions de :  $\frac{4}{7}$  ou  $\frac{4}{41}$  : il suffit

de multiplier les décompositions de  $\frac{4}{7}$  par  $\frac{1}{287}$  et celles de  $\frac{4}{41}$  par

$$\frac{1}{49}$$

ou :

$$\frac{4}{2009} = \frac{2016}{2009 \times 504} = \frac{1}{504} + \frac{7}{2009 \times 504}$$

$$= \frac{1}{2 \times 504} + \frac{1}{2 \times 504} + \frac{1}{287 \times 504}$$

$$\text{ou} = \frac{1}{504} + \frac{1}{287 \times 2 \times 504} + \frac{1}{287 \times 2 \times 504}$$

ou.....

4. On attend que le candidat fasse le bilan des familles de fractions qu'il saurait décomposer et indique les familles de fractions qui lui résistent et explique. On évaluera cette question selon la richesse des réponses.

Au vu des questions précédentes, il faudrait chercher un contre exemple parmi les nombres  $N$  premiers de la forme  $4k+1$ ...

**Avec la calculatrice** par A. Guillemot

Conjecture de Paul Erdős

- a) Pour trouver toutes les décompositions de  $\frac{4}{41}$  en somme de trois fractions égyptiennes, nous allons utiliser un programme.

Soit  $\frac{4}{41} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  avec  $a \leq b \leq c$ .

Comme  $\frac{4}{41} < \frac{1}{10}$ ,  $a \geq 11$ .

Comme  $a \leq b \leq c$ ,  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{a}$  donc  $\frac{4}{41} \leq \frac{3}{a}$  ce qui entraîne que  $a \leq 30$ .

$\frac{4}{41} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{2}{b}$  donc  $b \leq \frac{82a}{4a-41}$ .

A l'aide du programme suivant, on trouve les 7 décompositions de  $\frac{4}{41}$ .

|                     |                                                          |
|---------------------|----------------------------------------------------------|
| $\{11, 154, 6314\}$ | Define <b>toulouse()</b> =                               |
| $\{11, 164, 1804\}$ | Prgm                                                     |
| $\{12, 72, 2952\}$  | For a, 11, 30                                            |
| $\{12, 82, 492\}$   | For b, a, $\frac{82 \cdot a}{4 \cdot a - 41}$            |
| $\{12, 123, 164\}$  | $\frac{4}{41} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \rightarrow d$ |
| $\{14, 41, 574\}$   | $\frac{1}{d} \rightarrow c$                              |
| $\{18, 24, 2952\}$  | If fPart(c)=0 and $c > b-1$                              |
| <i>Terminé</i>      | Disp {a,b,c}                                             |
|                     | EndFor                                                   |
|                     | EndFor                                                   |
|                     | EndPrgm                                                  |

On a donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{41} &= \frac{1}{11} + \frac{1}{154} + \frac{1}{6314} = \frac{1}{11} + \frac{1}{164} + \frac{1}{1804} \\
 &= \frac{1}{12} + \frac{1}{72} + \frac{1}{2952} = \frac{1}{12} + \frac{1}{123} + \frac{1}{164} \\
 &= \frac{1}{14} + \frac{1}{41} + \frac{1}{574} = \frac{1}{18} + \frac{1}{24} + \frac{1}{2952}
 \end{aligned}$$

- b)  $2009 = 41 \times 49$  donc  $\frac{4}{2009} = \frac{4}{41} \times \frac{1}{49}$ .

En multipliant tous les dénominateurs de la ligne de résultats de la question précédente par 49, on obtient sept décompositions de  $\frac{4}{2009}$ .

On peut aussi dire que  $\frac{4}{2009} = \frac{1}{41} \times \frac{4}{49}$ .

En modifiant légèrement le programme précédent, on peut obtenir les 18 décompositions de  $\frac{4}{49}$ , ce qui nous donnera 18 décompositions supplémentaires de  $\frac{4}{2009}$  en multipliant les dénominateurs par 41.

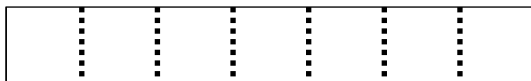
|                 |                                                          |
|-----------------|----------------------------------------------------------|
| { 14,99,9702 }  | Define <b>toulouse2</b> ( )=                             |
| { 14,100,4900 } | Prgm                                                     |
| { 14,102,2499 } | For a,13,36                                              |
| { 14,105,1470 } | For b,a, $\frac{98 \cdot a}{4 \cdot a - 49}$             |
| { 14,112,784 }  | $\frac{4}{49} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \rightarrow d$ |
| { 14,126,441 }  | $\frac{1}{d} \rightarrow c$                              |
| { 14,147,294 }  | If fPart(c)=0 and c>b-1                                  |
| { 14,196,196 }  | Disp {a,b,c}                                             |
| { 15,70,1470 }  | EndFor                                                   |
| { 15,98,210 }   | EndFor                                                   |
| { 16,56,784 }   | EndPrgm                                                  |
| { 16,98,112 }   |                                                          |
| { 18,42,441 }   |                                                          |
| { 18,63,98 }    |                                                          |
| { 21,30,1470 }  |                                                          |
| { 21,42,98 }    |                                                          |

## Exercice n° 4 (Série S)

### Enoncé

#### Les timbres d'Eliott

Eliott achète un carnet de timbres comportant sept timbres disposés « en bande » séparés par une ligne prédécoupée en pointillés comme sur la figure :



Chaque timbre a pour valeur 1 Phoebus.

1. Eliott pense qu'en détachant seulement le troisième timbre – par découpage des deux lignes en pointillés correspondantes – il peut réaliser tous les affranchissements de valeur entière entre 1 et 7 Phoebus. A-t-il raison ?
2. Il achète un nouveau carnet de timbres plus long pour lequel les timbres sont toujours disposés en bande. En découpant exactement trois lignes en pointillés, il remarque qu'il peut de nouveau réaliser tous les affranchissements de valeur entière entre 1 et  $k$  Phoebus où  $k$  est un entier naturel. Déterminer le nombre  $k$  le plus grand possible pour qu'il en soit ainsi. Eliott se met à rêver de carnets de timbres de plus en plus longs.
3. Reprendre la question précédente en découpant six lignes en pointillés d'un nouveau carnet.
4. Combien de découpes devrait prévoir Eliott s'il devait atteindre tous les affranchissements de valeur entière de 1 à 2 009 Phoebus ?

On pourra utiliser la formule :  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ , vraie pour tout entier naturel  $n$ .

## Eléments de solution

1. Le troisième timbre affranchit pour 1 Phoebus, les deux premiers pour 2, les trois premiers pour 3, les quatre derniers pour 4 ; puis les affranchissements à 5, 6 et 7 Phoebus en ajoutant à ces quatre derniers respectivement les précédents.
2. Avec un timbre et un assemblage de deux timbres, on affranchit pour 1, 2, 3 Phoebus ; un assemblage de quatre, un autre de huit timbres permettent d'affranchir exhaustivement de 1 à 15 Phoebus. On obtient ces assemblages par trois découpes d'un carnet de quinze timbres. Un carnet de seize timbres ne peut être découpé en quatre assemblages satisfaisant aux affranchissements souhaités.
3. Comme ci-dessus, en complétant par trois assemblages de seize, trente-deux, soixante quatre timbres on constitue un carnet de cent vingt sept timbres pour lequel le découpage de six lignes est satisfaisant de 1 à 127 Phoebus exhaustivement. On ne peut faire plus.
4. Sept découpes permettent de réaliser tous les affranchissements de valeur entière de 1 à 255 Phoebus ; dix découpes permettent de réaliser tous les affranchissements de valeur entière de 1 à 1023 Phoebus et onze tous les affranchissements de valeur entière de 1 à 2047 Phoebus. Il faut onze découpes pour atteindre 2009 Phoebus.