

STRASBOURG

Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

On dispose de deux nappes rondes de même diamètre et d'une table carrée.

On se demande si il est possible de recouvrir entièrement la table avec les deux nappes. Le carré a pour côté 1,8 mètre.

1. On suppose que le diamètre des nappes est 2,009 mètres. Est-ce possible ?
2. Déterminer le diamètre minimal des nappes pour que ce soit possible

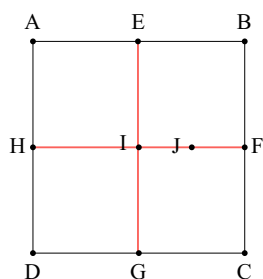
Eléments de solution (Paul-Louis Hennequin)

1. Soient E, F, G, H les milieux des côtés [AB], [BC], [CD], [DA] de la table, I le milieu de [HF], J le milieu de [IF].

Pour qu'une des nappes circulaires recouvre à la fois les points E, B, G, C, et donc le rectangle EBCG et donc le cercle circonscrit à ce rectangle, il est nécessaire et suffisant que son rayon soit supérieur à $JB = JE = JC = JG$.

Or $JB^2 = JF^2 + FB^2 = (0,45)^2 + (0,90)^2 = 1,0125$

d'où $1,0069 \geq JB > 1,006$ alors que le rayon de chaque nappe est 1,0045. Le recouvrement est impossible.



2. Pour qu'il soit possible, le diamètre minimal d'une nappe doit être 2,013 mètres.

Exercices n° 2 et 4

Enoncé

On appelle partition d'un entier strictement positif toute décomposition de cet

entier en somme d'entiers strictement positifs.

Par exemple, les partitions de 5 sont 5, 4+1, 3+2, 3+1+1, 2+2+1, 2+1+1+1 et 1+1+1+1+1.

On effectue le produit des termes intervenant dans chaque partition et on cherche à obtenir le produit maximum. Dans l'exemple précédent, le produit maximum est donc obtenu avec la partition $5 = 3 + 2$ et vaut $3 \times 2 = 6$.

1. Quel est ce maximum pour les entiers 6, 7 et 8 ?
2. (**Série S**) Pour les entiers 2007, 2008 et 2009, déterminer ce maximum et la (les) partition(s) correspondante(s).
2. (**Séries autres que S**) Pour les entiers 12, 13 et 14, déterminer ce maximum et la (les) partition(s) correspondant(e)s. Justifier votre réponse.
On ne demande pas de lister toutes les partitions possibles des entiers 12, 13 et 14...

Éléments de solution (P.L.H.)

Soit N l'entier à partitionner. Pour une partition de N notons p_k le nombre de termes égaux à k . On a donc la condition $\sum_{k \geq 1} k p_k = N$ et l'on cherche à

maximiser le produit $\prod_{k \geq 1} k^{p_k} = \prod_{k \geq 1} \left(k^{1/k}\right)^{k p_k}$.

Montrons que l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $k \mapsto k^{1/k}$ est maximum pour $k = 3$: $k^{1/k} \leq 3^{1/3}$ avec inégalité stricte pour $k \neq 3$. Cette inégalité équivaut à $k^3 \leq 3^k$ et se vérifie immédiatement pour $k = 1, 2, 3$.

Démontrons-la par récurrence :

Si elle est vérifiée pour un $k \geq 3$, on a

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \leq k^3 + k^3 + k^2 + 1 \leq 3 \times 3^k = 3^{k+1},$$

et elle est vérifiée pour $k+1$.

On en déduit $P \leq (3^{1/3})^{\sum_{k \geq 1} k p_k} = (3^{1/3})^N$.

Si N est divisible par 3, ce majorant est atteint pour la partition définie par $p_3 = \frac{N}{3}$.

Pour $N = 6$, ce maximum $3^2 = 9$ est atteint pour la partition $6 = 3 + 3$.

Pour $N = 12$, $3^4 = 81$ est atteint pour la partition $12 = 3 + 3 + 3 + 3$.

Pour $N = 2007$, 3^{669} est atteint pour la partition $2007 = \underbrace{3 + 3 + \dots + 3}_{669 \text{ termes}}$.

Si N est de la forme $3p+1$, si on choisit $p_3 = \frac{N-1}{3}$ et $p_1 = 1$, on obtient un produit 3^N tandis que si on choisit $p_3 = \frac{N-1}{3} - 1 = p-1$ et $p_2 = 2$ (ou $p_4 = 1$) et les autres nuls, on obtient $P = 4 \times 3^{p-1} > 3^p$.

Pour $N = 7$, le maximum 12 est atteint pour la partition $2 + 2 + 3$ (ou $4 + 3$).

Pour $N = 13$, le maximum $4 \times 3^3 = 108$ est atteint pour la partition $2 + 2 + 3 + 3 + 3$ (ou $4 + 3 + 3 + 3$).

Pour $N = 2008$, le maximum 4×3^{668} est atteint pour la partition $2 + 2 + \underbrace{3 + \cdots + 3}_{668 \text{ termes}}$.

Si N est de la forme $3p + 2$, le maximum est atteint si $p_3 = p$ et $p_2 = 1$ et les autres nuls. On obtient alors $P = 2 \times 3^N$.

Pour $N = 8$, le maximum 18 est atteint pour la partition $2 + 3 + 3$.

Pour $N = 14$, le maximum 162 est atteint pour la partition $2 + 3 + 3 + 3 + 3$.

Pour $N = 2009$, le maximum 2×3^{669} est atteint pour la partition $2 + \underbrace{3 + \cdots + 3}_{669 \text{ termes}}$.

Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Une voiture a roulé 20 000 kilomètres, chacune des cinq roues (dont la roue de secours) est usée de la même façon. Chaque roue a un diamètre de 50 centimètres.

1. Combien chaque roue a-t-elle parcouru de kilomètres ?
2. Combien de tours chaque roue a-t-elle fait ?

Eléments de solution (P.L.H.)

1. Chaque roue est au repos pour un cinquième du kilométrage : elle a donc parcouru $\frac{4}{5} \times 20\,000 = 16\,000$ kilomètres.
2. En un tour une roue en service parcourt $\pi \times 50 \text{ cm} = \pi \times 0,5$ mètres. Le nombre de tours en 16 000 km est donc égal à

$$\frac{16 \times 10^6}{0,5\pi} = \frac{32 \times 10^6}{\pi} = 10\,135\,888 \text{ mètres.}$$

En pratique, la précision sur la mesure du diamètre, compte tenu de l'usure du pneu, de la pression, de la charge de la voiture, n'excède pas 1%.

On peut donc affirmer seulement que le nombre de tours est compris entre 10^7 et $1,02 \times 10^7$.