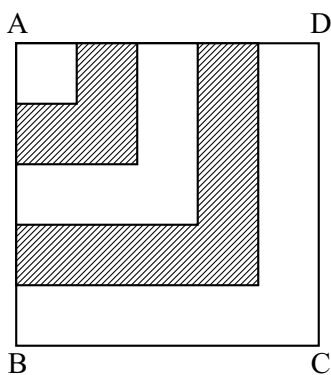


ROUEN

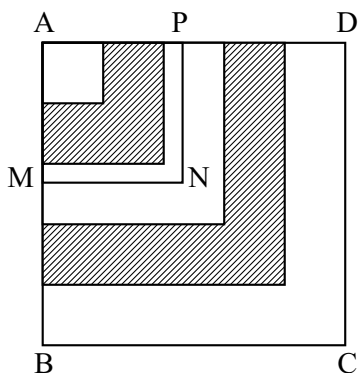
Exercice n° 1 (Séries S-STI)

Enoncé



Paul possède un carré ABCD de 50 mm de côté qui présente des rayures comme sur la figure ci-contre : le premier carré a 10 mm de côté, la première bande rayée complète le carré pour en faire un carré de 20 mm de côté, la deuxième bande, non rayée, le complète pour en faire un carré de 30 mm de côté ...

Paul propose à son ami Antoine un jeu. Paul choisit les surfaces rayées, Antoine prend donc les surfaces blanches. Antoine tire au hasard un nombre entier de 1 à 49 sur le principe du loto. On appelle x le nombre tiré. On appelle M le point de [AB] tel que $AM = x$ (x est la mesure en mm du côté AM), et P le point de [AD] tel que AMNP soit un carré. Le territoire de Paul est la partie à rayures à l'intérieur du carré AMNP. Le territoire d'Antoine est la partie blanche à l'intérieur du carré AMNP. Le gagnant est celui dont l'aire du territoire est la plus grande.



1.
 - a. Antoine a tiré 8. Qui est le gagnant ?
 - b. Antoine a tiré 16. Qui est le gagnant ?
 - c. Antoine a tiré 21. Qui est le gagnant ?
 - d. Antoine a tiré 26. Qui est le gagnant ?
 - e. Antoine a tiré 36. Qui est le gagnant ?
2. Déterminer toutes les valeurs de x qui permettent à Paul de gagner.

Éléments de solution (P.L.H.)

1. Établissons le tableau ci-dessous où la première ligne contient les tirages d'Antoine, la seconde, l'aire en mm^2 du territoire de Pascal, la troisième celle du territoire d'Antoine et la quatrième le gagnant.

8	16	21	26	36
64	100	141	376	500
0	156	300	300	796
A	P	P	A	P

- 2.
- Si $x \leq 10$, l'aire du territoire de Pascal est nulle et celle du territoire d'Antoine est x^2 donc Antoine gagne et Paul perd.
 - Si $10 \leq x \leq 20$, Paul gagne si $x^2 - 100 \geq 100$ ou $x^2 \geq 200$, ou $x \geq 10\sqrt{2} \approx 14,142$ mm, et comme x entier, $15 \leq x \leq 20$.
 - Si $20 \leq x \leq 30$, l'aire du territoire de Paul est 300 et celle du territoire d'Antoine est $x^2 - 300$. Paul gagne donc si $x^2 - 300 \leq 300$ ou $x \leq 10\sqrt{6} \approx 24,495$ mm, et comme x entier, $20 \leq x \leq 24$.
 - Si $30 \leq x \leq 40$, l'aire du territoire d'Antoine est 600 et celle du territoire de Paul $x^2 - 600$. Paul gagne donc si $600 \leq x^2 - 600$ ou $x^2 \geq 1200$ ou $x \geq 10\sqrt{12} \approx 34,641$ mm, et comme x entier, $35 \leq x \leq 40$.
 - Enfin si $40 \leq x \leq 50$, l'aire du territoire de Paul est 1000 et celle d'Antoine $x^2 - 1000$. On a $x^2 - 1000 \leq 1000$ si $x^2 \leq 2000$ ou $x \leq 10\sqrt{20} \approx 44,721$ mm, et comme x entier, $40 \leq x \leq 44$.

Finalement Paul gagne si $15 \leq x \leq 24$ et si $35 \leq x \leq 44$.

Exercice n° 2 (Séries S-STI)

Énoncé

La **persistance** d'un nombre non nul est le nombre minimal de fois où on applique une procédure à l'ensemble des chiffres de ce nombre pour le réduire à un chiffre entre 0 et 9, appelé **résidu**.

Ainsi, la persistance additive consiste à additionner les chiffres et à compter le nombre minimal d'étapes pour obtenir un chiffre entre 0 et 9, appelé le résidu. De même pour la persistance multiplicative : À partir d'un entier non nul n , on multiplie les chiffres qui le composent pour obtenir un deuxième entier que l'on décompose également pour en faire le produit de ses chiffres. On continue le procédé jusqu'à ce que l'on obtienne un chiffre entre 0 et 9. Ce dernier chiffre étant appelé le résidu.

Ainsi 637 devient $6 \times 3 \times 7 = 126$ qui devient à son tour $1 \times 2 \times 6 = 12$ puis $1 \times 2 = 2$.

2 est le résidu et la persistance multiplicative de 637 est 3.

Partie 1 : persistance additive :

- a) Quel est le plus petit entier n de persistance additive 1 ? 2 ?
- b) Montrer que le plus petit entier n de persistance additive 3 est 199.
- c) Quel est le lien entre les deux plus petits entiers de persistance additive k et $k + 1$? En déduire le plus petit entier de persistance additive 4.
- d) Montrer que le résidu additif d'un produit de deux nombres entiers est égal au produit des résidus additifs de ces deux nombres.

Partie 2 : persistance multiplicative :

- a) Montrer que la persistance multiplicative de 2468 est 5.
- b) Quel est le plus petit entier n de persistance multiplicative 1 ? 2 ? 3 ?
- c) Le nombre d'étapes pour calculer la persistance multiplicative d'un entier quelconque peut-il devenir infini ?
- d) le résidu multiplicatif d'un produit de deux nombres entiers est-il égal au produit des résidus multiplicatifs de ces deux nombres ?

Eléments de solution (P.L.H.)**Partie 1 : persistance additive :**

- a)
 - Un entier à un chiffre a pour résidu lui-même et pour persistance 0.
 - Le plus petit entier à deux chiffres est 10 ; il a pour résidu 1 et pour persistance 1.
 - Le plus petit entier à deux chiffres de somme au moins 10 est 19 qui est de résidu 1 et de persistance 2.
- b) $199 \rightarrow 19 \rightarrow 10 \rightarrow 1$; 199 est de persistance 3 et c'est bien le plus petit de cette persistance, car tout entier plus petit a une somme de ses chiffres au plus égale à 18 ; une telle somme est elle-même un nombre dont la somme des chiffres a un seul chiffre, le résidu.
- c) Soit u le plus petit entier de persistance k et v celui de persistance $k + 1$. Soit $s(v)$ la somme des chiffres de v , $s(v)$ est de persistance k donc $s(v) \geq u$.

Le plus petit entier de persistance 4 est donc le plus petit entier dont la somme des chiffres est supérieure ou égale à 199.

Considérons le nombre $1 \underbrace{9 \dots 9}_{22 \text{ chiffres } 9} = 2 \times 10^{22} - 1$.

La somme de ses chiffres est $1 + 22 \times 9 = 199$. Ce nombre est de persistance additive 4 car 199 est de persistance 3.

Tout nombre plus petit

soit a 23 chiffres dont le premier est 1 et un des autres < 9 ,
soit a 22 chiffres.

Il est donc strictement inférieur à 199.

- d) Si $a = r \pmod{9}$ et $b = s \pmod{9}$, on a $ab = rs \pmod{9}$.

Soit $a = \sum_{i=0}^n a_i 10^i$. On déduit de $10^i = (9+1)^i = 1 \pmod{9}$ que $a = \sum_{i=0}^n a_i \pmod{9}$.

Comme le résidu est toujours compris entre 1 et 9, le résidu additif d'un produit de deux entiers est égal au produit des résidus additifs de ces deux nombres calculé moulo 9.

Partie 2 : persistance multiplicative :

- a) $2468 \longrightarrow 384 \longrightarrow 96 \longrightarrow 54 \longrightarrow 20 \longrightarrow 0$; le résidu multiplicatif de 2 468 est 0 et sa persistance multiplicative 5.

- b) Le plus petit entier de persistance multiplicative 1 est 10

Le plus petit entier de persistance multiplicative 2 est 25

Le plus petit entier de persistance multiplicative 3 est 39.

En effet : $10 \longrightarrow 1$ et tout entier inférieur à 10 n'a qu'un chiffre et est donc de persistance 0.

$25 \longrightarrow 10 \longrightarrow 1$: 25 est de persistance 2 et tout entier inférieur

- soit a 1 chiffre (persistance 0) ;
- soit a pour premier chiffre 1 (persistance 1) ;
- soit a 1 pour premier chiffre, le deuxième inférieur à 5 (persistance 1).

$39 \longrightarrow 27 \longrightarrow 14 \longrightarrow 4$: 39 est bien de persistance 3 et on vérifie que tout entier compris entre 26 et 38 est de persistance 2 ou 1.

- c) Soit $N = \sum_{i=0}^n a_i 10^i$, un entier quelconque a $n+1$ chiffres avec $a_n \geq 1$ et $0 \leq a_i \leq 9$ pour tout i compris entre 0 et n .

Après une étape, il devient :

$$\prod_{i=0}^k a_i \leq a_k \cdot 9^k < a_k \cdot 10^k \leq N$$

La suite obtenue est donc strictement décroissante jusqu'au résidu et prend moins de $N+1$ valeurs distinctes.

Le nombre d'étapes est donc borné par $N+1$.

- d) En général, le résidu multiplicatif de deux entiers n'est pas égal au produit des résidus multiplicatifs.

Par exemple $3 \times 4 = 12$; 3 et 4 sont égaux à leurs résidus alors que 12 a pour résidu 3 qui n'est pas égal à 12.

Exercice n° 3 (Séries autres que S-STI)

Enoncé

On appelle N l'entier obtenu en écrivant à la suite tous les entiers de 1 à 2009.

$$N = 1234567891011121 \dots 03200420052006200720082009.$$

1. Trouver l'entier k tel que 10^k soit la puissance de 10 la plus proche de N .
2. N est-il divisible par 9 ?

Eléments de solution (P.L.H.)

1. En comptant successivement les nombres de chiffres des nombres de 1 à 2009, nous obtenons le nombre de chiffres de N :
 $9 + 2(99 - 9) + 3(999 - 99) + 4(2009 - 999) = 9 + 180 + 2700 + 4040 = 6929$.
 On a donc $10^{6928} < N < 10^{6929}$
 et plus précisément $10^{6929} - N > 10^{6928}[10 - 1, 235] > 8 \cdot 10^{6928}$
 tandis que $N - 10^{6928} < 0, 2 \cdot 10^{6928}$.
 10^{6928} est donc la puissance de 10 la plus proche de N .

2. N est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9, donc est nulle modulo 9.

Pour calculer cette somme modulo 9, groupons les chiffres de N un par un jusqu'à 9, puis deux par deux de 10 à 99, trois par trois de 100 à 999, quatre par quatre de 1000 à 2009. Nous obtenons ainsi tous les nombres de 1 à 2009.

Chacun d'eux est égal, modulo 9, à la somme de ses chiffres.

Ainsi, modulo 9, la somme de tous les chiffres de N est égale à

$$\sum_{i=1}^{2009} i = \frac{2009 \times 2010}{2} = 2009 \times 1005 = 2 \times 6 = 3 \pmod{9}$$

Cette somme n'est donc pas divisible par 9.

Exercice n° 4 (Séries autres que S-STI)

Enoncé

Un nombre premier est un entier naturel (positif) qui n'est divisible que par 1 et lui-même. 1 n'est pas premier. Tout entier peut s'écrire de façon unique comme produit de nombres premiers.

Etant donné un entier naturel $n \geq 2$, on construit une suite de nombres issue de n :

- A l'étape 0, le nombre qui débute la suite est n ;
- A chaque étape, on calcule la somme des facteurs premiers du nombre de l'étape précédente. Si le nombre trouvé est premier, la suite se stabilise sur cette valeur.

Exemple : Si $n = 15$, la suite issue de 15 est : $(15 ; 8 ; 6 ; 5 ; 5 ; 5 ; \dots)$: $15 = 3 \times 5$ donc le suivant est $3 + 5 = 8$. $8 = 2^3$ donc le suivant est $2 + 2 + 2 = 6$ (on additionne 2 trois fois à cause de la puissance 3 de 2^3). $6 = 2 \times 3$ donc le suivant est 5, qui est premier, la suite se stabilise sur 5.

$E(n)$ est le numéro de l'étape à partir de laquelle la suite issue de n se stabilise (on commence à l'étape 0). $v(n)$ est la valeur sur laquelle se stabilise la suite issue de n . Ainsi $E(15) = 3$ et $v(15) = 5$.

1. Montrer que $E(2\,009) = v(2\,009) = 5$. Ainsi 2 009 est un entier n qui vérifie $E(n) = 5$ et $v(n) = 5$.
2. Expliquer pourquoi 5 est le plus petit entier k pour lequel on puisse trouver au moins un nombre n tel que $E(n) = k$ et $v(n) = k$.
3. Des nombres premiers sont **jumeaux** s'ils diffèrent de 2. Ainsi 11 et 13 sont premiers jumeaux. Calculer $E(n)$ et $v(n)$ si $n = 2p$ où p est un entier premier jumeau avec $p + 2$.

Eléments de solution (P.L.H.)

1. $2009 = 49 \times 41 = 7^2 \times 41$; on en déduit la suite :
 $2009 ; 7 + 7 + 41 = 55 = 5 \times 11 ; 5 + 11 = 16 = 2^4 ; 2 + 2 + 2 + 2 = 8 = 2^3 ; 2 + 2 + 2 = 6 = 2 \times 3 ; 2 + 3 = 5$ premier.
 D'où $E(2009) = v(2009) = 5$.
2. Si $v(n) = k \leq 4$; k doit être somme de deux nombres premiers. La seule possibilité est $4 = 2 + 2$ et $2 \times 2 = 4$ donc le prédécesseur de 4 est 4 et $E(4) = 0$.
3. p étant premier, $2p$ donne la suite $2p ; 2 + p$ car $2 + p$ est premier donc $p \neq 2$.
 On en déduit $E(2p) = 1$ et $v(2p) = 2 + p$.