

RENNES

Exercice n° 1 (Séries S et STI)

Énoncé

Un peu de calcul

Evariste et Leonhard après un cours de mathématiques viennent se détendre au club des mathématiciens de leur université. Sur le comptoir trône une fontaine à eau qui se compose d'un cube de côté de longueur a surmonté d'une cruche. On suppose que a est un nombre entier de dm et que la cruche contient 5 litres. Evariste demande à Leonhard s'il pense que le volume total de cette fontaine peut être un multiple entier de l'aire d'une face du cube. Leonhard lui répond qu'il n'y a qu'une solution et à son tour il lui demande si à son avis ce volume peut-être un multiple de cette aire augmentée de 7 dm^2 . Quelle est la réponse de Leonhard ? Que pensez-vous de sa question ?

Éléments de solution

Le volume total est $a^3 + 5$ en dm^3 , l'aire est a^2 . La question est donc de savoir si $a^3 + 5$ peut être un multiple de a^2 , ce qui ne peut arriver que si a^2 divise 5, ce qui n'arrive que pour $a = 1$.

Puis, maintenant, il s'agit de savoir si $a^3 + 5$ peut être un multiple de $a^2 + 7$.

Si a est tel que le quotient soit entier, alors $b = a - \frac{a^3 + 5}{a^2 + 7}$ l'est aussi. Comme $a \geq 1$, on a $\frac{7a - 5}{a^2 + 7}$ est un entier positif qui vérifie

$$ba^2 - 7a + 7b + 5 = 0 \quad (1)$$

et $b \neq 0$, sinon a n'est pas entier.

Le premier membre de (1) est un trinôme du second degré en a dont le discriminant

$$\Delta = -28b^2 - 20b + 49$$

est lui-même un trinôme du second degré en b à coefficient du terme carré négatif et comme a existe, $\Delta \geq 0$

Son discriminant réduit est positif et b est compris entre les racines et inférieur

à la racine de Δ soit $\approx 1,01$. Donc b ne peut prendre que la valeur 1 et a est solution de $a^2 - 7a + 12 = 0$, soit $a = 3$ ou $a = 4$. Les deux solutions conviennent.

Exercice n° 2 (Séries S et STI)

Énoncé

Cela aurait pu « durer »

Albrecht Dürer (1471-1528) est un peintre important de la Renaissance allemande. Il est particulièrement célèbre pour ses gravures. Il était aussi mathématicien et a publié en 1525 un livre « *Instructions sur la manière de mesurer à l'aide du compas et de l'équerre* » dont une partie est consacrée au tracé géométrique des lettres de l'alphabet.

Partie A Tracé de la lettre « i » en police textura

1. Lire le texte de Dürer³ ci-dessous.

Les lettres de l'ancienne gothique textura ont été formées à peu près comme celles que je vais décrire dans la suite, encore qu'on les fasse maintenant d'une manière différente.

Bien que l'alphabet débute par la lettre a, j'ai de bonnes raisons de lui préférer la lettre i, car à partir d'elle on peut former pratiquement toutes les autres lettres, soit en y ajoutant soit en y enlevant quelque chose.

Premièrement, forme la lettre i à l'aide de carrés, dont tu en empiles trois verticalement. Divise le côté supérieur du carré supérieur et le côté inférieur du carré inférieur, chacun par deux points en trois segments égaux. Ensuite, place dessus un carré en pointe, c'est-à-dire tel que sa diagonale soit à la verticale sur le premier point du côté du carré. Ainsi, les sommets du carré en pointe débordent davantage à gauche qu'à droite.

Ensuite, prolonge de part et d'autre les arêtes des carrés superposés jusqu'au carré en pointe. Procède de même au bas de la lettre, mais place le sommet supérieur du carré sur le deuxième point, le plus à droite, du côté inférieur du carré. Abaisse latéralement les deux arêtes des carrés verticaux jusqu'au carré en pointe. Ainsi est formée la lettre i. Dessine au-dessus, avec une plume plus fine, une petite demi-lune.

1. Construire selon ses instructions le « i » à la règle et au compas dans la grille fournie en annexe 1. Les lignes de construction seront laissées apparentes et les théorèmes de géométrie utilisés seront indiqués. Proposer une construction alternative du « carré en pointe » inférieur.

³Traduction J.Peiffer, Seuil.

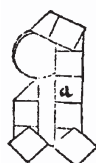
2. Déterminer par le calcul de combien débordé à droite et à gauche le carré en pointe par rapport au rectangle vertical du corps du « i ».

Partie B Tracé de la lettre « a »



Item forme la lettre n à partir de deux jambages de la lettre i de sorte que leurs têtes et pieds respectifs se touchent. Ainsi, l'espace compris entre les jambages sera plus étroit qu'un trait de lettre. Mais n'y mets plus de lunule. Donne la même hauteur à toutes les lettres brèves de l'alphabet.

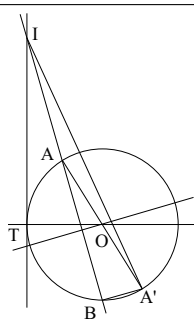
[...] Construis le r comme le i, mais rajoute en tête à droite un carré dont un sommet touche le i.



Item le a, forme sa moitié inférieure comme le n, mais tronque l'extrémité en haut à gauche du jambage gauche le long de la diagonale du carré médian. Conserve dans le jambage droit les trois carrés empilés, mais incline un peu davantage le carré en pointe de telle sorte que, joint à un demi carré, ils atteignent la hauteur de la lettre.

Coupe le carré de manière oblique afin que son extrémité inférieure soit plus saillante que son extrémité supérieure. Décris un arc circulaire vers la gauche et vers le bas, qui passe par l'extrémité supérieure du jambage gauche.

1. On se propose de tracer le « a » suivant les descriptions de Dürer. Sur la grille ci jointe on a déjà représenté le « r ». Cette représentation fixe la hauteur du « a ».
2. On considère un carré ABCD de côté unité et un point E sur le côté [AB] tel que $AE = d$ avec $0 < d < 1$. Comment doit être placé le point F sur le côté [CD] pour que les quadrilatères AEFD et EBCF aient la même aire ?
3. Construire la lettre « a » sur la feuille fournie en annexe 2. Pour la construction du « carré en pointe de telle sorte que, joint à un demi carré, ils atteignent la hauteur de la lettre », on utilisera le fractionnement du côté du carré réalisé dans la partie A.

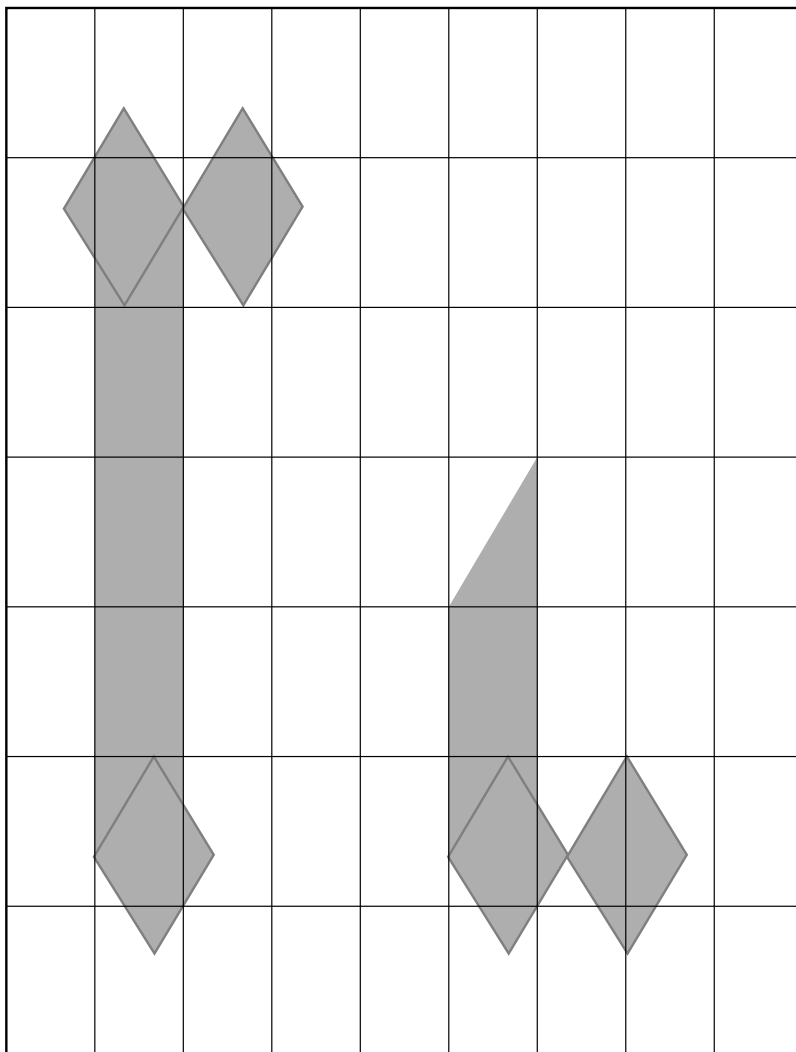


Question bonus :

Pour le tracé de l'arc de cercle extérieur Dürer dit « *Décris un arc circulaire vers la gauche et vers le bas, qui passe par l'extrémité supérieure du jambage gauche* ». Il y a une infinité de cercles répondant à cette contrainte. On se propose d'imposer que la verticale gauche de la jambe gauche du « a » lui soit tangente. Il s'agit de construire un cercle passant par deux points donnés et tangent à une droite donnée. Il n'existe pas de construction géométrique simple, on recherche ici une solution numérique.

On suppose avoir répondu à la question avec la figure jointe : A et A' sont diamétralement opposés et O est l'intersection de la médiatrice de [AB] avec la perpendiculaire à la tangente en T. Démontrer que $IA \times IB = IT^2$.

Annexe 2



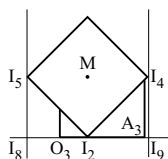
Eléments de solution

Partie A

1. La construction de la lettre « i » sert de base à la construction des autres lettres. La grille sert de repère pour les verticales et les horizontales.
2. a- « *Divise le côté supérieur du carré supérieur et le côté inférieur du carré inférieur, chacun par deux points en trois segments égaux.* ». Pour réaliser ce passage, on utilise le théorème de Thalès et sa réciproque. Sur la diagonale [AD] du rectangle OABD, la parallèles à (OA), (O₁A₁) détermine un point tel que les rapports soient conservés. Comme $\frac{DO_2}{DO} = \frac{1}{3}$, on a $\frac{DI_1}{DA} = \frac{1}{3}$. De la même manière, la parallèle à (AB) passant par I₁ détermine le point I₂ sur [DB] tel que $\frac{DI_2}{DB} = \frac{1}{3}$. On peut placer le deuxième point sur [DB] par une construction du même type à partir du point d'intersection de (O₁A₁) avec [AD]. On peut aussi reporter la longueur DI₂.
- b- « *Ensuite, place dessus un carré en pointe, c'est-à-dire tel que sa diagonale soit à la verticale sur le premier point du côté du carré.* ». Sur la droite (I₁I₂) on place le point I₃, extérieur au rectangle OABD, de sorte que I₂I₃ = OA₁. On place ensuite le point M, milieu de [I₂I₃]. On construit la parallèle à (DB) passant par M et de part et d'autre de M, sur cette droite on place les points I₄ et I₅ à une distance de M égale à MI₂.
- c- « *Procède de même au bas de la lettre, mais place le sommet supérieur du carré sur le deuxième point, le plus à droite, du côté inférieur du carré.* »
On peut réaliser une construction du même type que celle réalisée en b-. Il existe une alternative : placer le milieu C du rectangle OABD, ce point est centre de symétrie du " i " d'après les explications de construction données. On construit alors les symétriques par rapport à C des points I₂, I₃, I₄ et I₅.

3.

Détermination du débordement à gauche : si on définit la mesure du côté du carré comme unité de longueur, sa diagonale a pour mesure $\sqrt{2}$. Le débordement est égal à



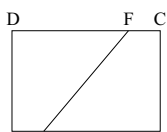
$$O_3I_8 = I_2I_8 - O_3I_2 = MI_5 - O_3I_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{3}.$$

Détermination du débordement à droite :

$$\text{c'est } A_3I_9 = I_2I_9 - I_2A_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

Partie B

1. La construction du « a » peut utiliser la construction du « n », leurs parties inférieures sont identiques.
- 2.



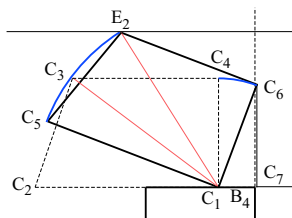
A E B

Pour que les deux quadrilatères aient la même aire, il suffit que les points E et F soient symétriques par rapport au centre du rectangle.

On a $AE = d$, désignons par c la longueur des côtés verticaux du rectangle. Les deux quadrilatères sont des trapèzes, s'ils ont des côtés de mêmes mesures, ils ont même aire. Ils ont même hauteur $AD = CB$. Comme $AE = d$, on a $EB = c - d$. Si on pose $FC = d$, alors $DF = c - d$.

a $EB = c - d$. Si on pose $FC = d$, alors $DF = c - d$.

3.



Sur le côté droit, on complète verticalement par 3 carrés. Ensuite : « *mais incline un peu davantage le carré en pointe de telle sorte que, joint à un demi carré, ils atteignent la hauteur de la lettre. Coupe le carré de manière oblique afin que son extrémité inférieure soit plus saillante que son extrémité supérieure.* ».

C'est ici que réside la difficulté dont la résolution a été suggérée dans la question précédente. En effet, quand Dürer parle de demi carré, il parle d'un carré découpé comme c'est réalisé dans la question 2). Il n'est pas précis sur ce qu'il entend par extrémité inférieure plus saillante que l'extrémité supérieure, c'est pourquoi dans le sujet il est ajouté qu'il faut réaliser le fractionnement du côté du carré réalisé dans la partie A. Il s'agit du découpage $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$. On commence par construire un trapèze dont les bases $[C_1C_2]$ et $[C_4C_3]$ sont horizontales. La hauteur, côté vertical $[C_1C_4]$ a pour mesure 1, la grande base $[C_1C_2]$ a pour mesure $1 + \frac{2}{3}$ et la

petite base $[C_4C_3]$ a pour mesure $1 + \frac{1}{3}$. Il s'agit ensuite de déterminer une rotation de centre C_1 qui va transformer le point C_3 en un point (noté E_2) situé sur l'horizontale passant par les sommets de la lettre « r » voisine : « *Donne la même hauteur à toutes les lettres brèves de l'alphabet* ». Le point E_2 est l'intersection à gauche du cercle de centre C_1 et de rayon C_1C_3 et de l'horizontale citée précédemment. La transformation qui transforme le quadrilatère $C_1C_2C_3C_4$ en le quadrilatère désiré $C_1C_5E_2C_6$ est la rotation de centre C_1 et d'angle $(\overrightarrow{C_1C_3}, \overrightarrow{C_1E_2})$. On peut alors construire les transformés des points C_2 et C_4 .

Corrigé de la question bonus :

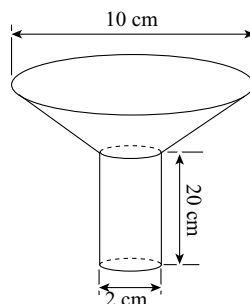
Tracé de l'arc extérieur : son support est le cercle (1) qui passe par les points D₃ et C₅, son centre est donc situé sur la médiatrice de [D₃C₅] et (2) qui est tangent à la droite (D₁D₄). D'après la figure donnée, [AA'] étant un diamètre, le triangle ABA' est rectangle en B. Le point B est donc la projection orthogonale de A' sur (AB). On peut en déduire que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA'} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = IA \times IB$ du fait que A et B sont du même côté par rapport à I.

lise deux types de pluviomètres . Ils ont tous en commun la propriété suivante : *S'il tombe une hauteur x de pluie, le volume d'eau recueillie par le pluviomètre est égal à l'aire de l'ouverture du pluviomètre multipliée par la hauteur de pluie x .* On rappelle la formule du volume V du cône de base B et de hauteur H :

$$V = \frac{1}{3}B \times H.$$

1. Pluviomètre cylindrique surmonté d'un entonnoir

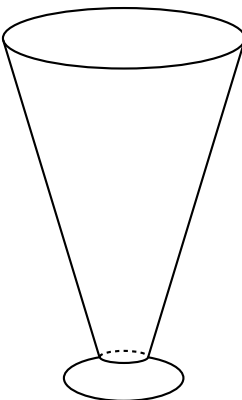
Le récipient de la figure ci-contre est un cylindre de diamètre 2 cm et de hauteur 20 cm surmonté d'un entonnoir dont l'ouverture a un diamètre de 10 cm.



- Supposons qu'il soit tombé 5 mm de pluie. Calculer la hauteur d'eau dans le cylindre.
- Supposons maintenant qu'il y ait 15 cm d'eau dans le pluviomètre. Calculer la hauteur de pluie correspondante.
- La hauteur d'eau dans le pluviomètre est-elle proportionnelle à la hauteur de pluie tombée ?

2. Pluviomètre en cône tronqué.

Le récipient de la figure ci-contre est un cône tronqué de 10 cm de diamètre dans sa partie supérieure et 2 cm dans sa partie inférieure, sa hauteur est de 20 cm.



- La hauteur d'eau dans le pluviomètre est-elle proportionnelle à la hauteur d'eau tombée ?
- Montrer que le volume d'un cône tronqué de rayon R dans sa partie supérieure et r dans sa partie inférieure et de hauteur H est : $V = \pi \frac{H}{3} (R^2 + r^2 + Rr)$.
- Revenons à notre pluviomètre. Supposons qu'il y ait 15 cm de hauteur d'eau dans le pluviomètre, quelle hauteur d'eau de pluie est-il tombé ?

Eléments de solution

1. Pluviomètre cylindrique surmonté d'un entonnoir

a) S'il est tombé 5 mm de pluie, le volume d'eau recueilli est égal à l'aire de l'ouverture du pluviomètre, soit $\pi \times 5^2$ en cm^2 , multipliée par la hauteur de pluie tombée, soit 0,5 cm.

Le volume d'eau recueilli est donc égal à : $\pi \times 5^2 \times 0,5 = 12,5\pi \text{ cm}^3$.

Soit h la hauteur d'eau dans le cylindre de rayon 1 cm.

On a $\pi \times 1^2 \times h = 12,5\pi$, on en déduit $h = 12,5$ cm.

La hauteur d'eau dans le cylindre est donc de 12,5 cm.

b) Soit x la hauteur d'eau tombée en mm .

On a $\pi \times 5^2 \times x \times 10^{-1} = \pi \times 1^2 \times 15$.

On en déduit : 15 cm d'eau dans le cylindre correspond donc à 6 mm de pluie.

c) D'une façon plus générale, s'il est tombé x mm de pluie, la hauteur d'eau dans le pluviomètre vérifie : $\pi \times 5^2 \times x \times 10^{-1} = \pi \times 1^2 \times h$.

On en déduit $h = 2,5x$, ce qui indique que la hauteur de pluie dans le pluviomètre est bien proportionnelle à la hauteur de pluie tombée, tant que $h < 20$ donc $x < \frac{20}{2,5} = 8$ cm.

2. Pluviomètre en cône tronqué

a) Si un jour, il tombe une hauteur de pluie double par rapport à celle de la veille, le volume d'eau recueilli par ce pluviomètre (que l'on aura vidé entre les deux jours) sera double, mais comme ce pluviomètre est évasé la hauteur d'eau dans le pluviomètre sera inférieure au double de la hauteur d'eau recueillie par le pluviomètre la veille. La hauteur d'eau dans ce pluviomètre n'est donc pas proportionnelle à la hauteur d'eau tombée.

b) Le volume V du cône tronqué de hauteur h de rayon R en haut et r en bas est égal au volume du cône de sommet S intersection des droites (CD) et (AB) et de hauteur BS auquel on retire le volume du cône de sommet S de rayon r et de hauteur SA . Il nous faut donc calculer la hauteur BS .

D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{SB}{SA} = \frac{R}{r} \text{ donc } SB = SA \frac{R}{r} = (SB - h) \frac{R}{r}.$$

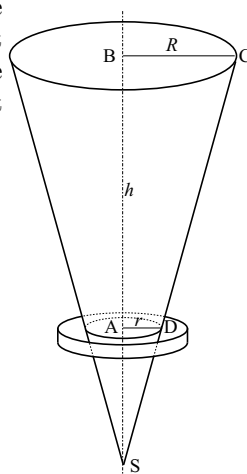
$$\text{On en déduit } SB \left(\frac{R}{r} - 1 \right) = h \frac{R}{r}$$

$$SA = SB - h = h \left(\frac{R}{R - r} - 1 \right) = \frac{hr}{R - r}.$$

On a donc

$$V = \frac{\pi}{3} \pi h \left(\frac{R^3 - r^3}{R - r} \right) = \frac{\pi h}{3} \times \frac{(R - r)(R^2 + r^2 + Rr)}{R - r}$$

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + r^2 + Rr).$$



c) Déterminons d'abord la hauteur SA représentée sur la figure ci-contre. D'après les calculs précédents et les données du problème, on a :

$$SA = h \frac{r}{R-r} = 20 \times \frac{1}{5-1} = 5 \text{ cm}$$

D'après le théorème de Thalès, le rayon R' du cercle délimitant la surface de l'eau dans le pluviomètre en haut, vérifie

$$\frac{R'}{r} = \frac{SM}{SA} = \frac{15+5}{5} = 4.$$

On a donc $R' = 4 \text{ cm}$. En notant h' la hauteur de l'eau et d'après la formule précédente, le volume V' d'eau dans le pluviomètre est donc égal à :

$$V' = \frac{\pi h'}{3} (R'^2 + r^2 + R'r)$$

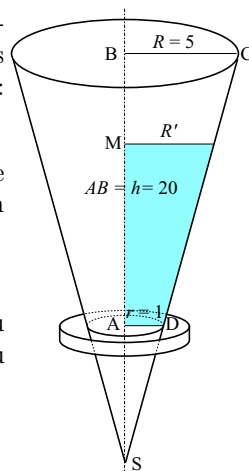
$$V' = \frac{\pi \times 15}{3} (4^2 + 1^2 + 4 \times 1) = 105\pi \text{ cm}.$$

Soit x la hauteur d'eau de pluie tombée en mm.

$$\text{On a } \pi \times 5^2 \times x \times 10^{-1} = 105\pi.$$

$$\text{On en déduit } x = \frac{105}{250} = 0,42.$$

La hauteur de pluie tombée est donc de 4,2 mm.



Exercice n° 4 (Séries autres que S et STI)

Enoncé

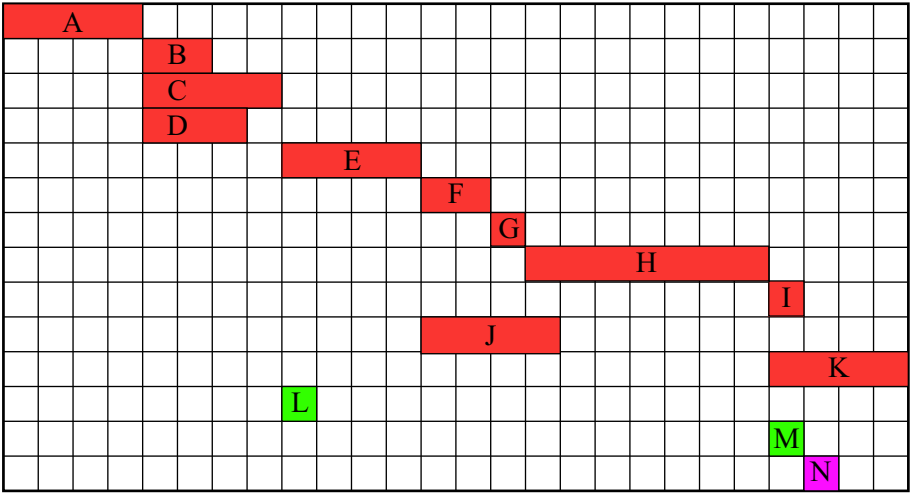
Marianne fait la fête

Marianne souhaite organiser une grande fête le 14 juillet 2009. Très méthodique, elle recense les différentes tâches qu'elle devra effectuer avant le 14 juillet :

Tâche	Temps nécessaire	Tâches préalablement effectuées
A : Autorisation d'organiser le rassemblement en Ile-et-Vilaine	4 semaines	Aucune
B : Etablir la liste des invités	2 semaines	A
C : Choisir une ville en Ile-et-Vilaine	4 semaines	A
D : Choisir un restaurateur	3 semaines	A
E : Obtenir l'autorisation de la ville	4 semaines	C
F : Impression des invitations	2 semaines	B-E
G : Mettre les invitations sous enveloppe, libeller les enveloppes et les poster	1 semaine	F
H : Attendre les réponses et les décompter	7 semaines	G
I : Passer la commande du menu	1 semaine	D-H

Tâche	Temps nécessaire	Tâches préalablement effectuées
J : Obtenir l'autorisation d'un lâcher de ballons	4 semaines	E
K : Organiser le transport	4 semaines	H-C-E
L : Prendre connaissance de la météo	1 jour	C
M : Achat de la décoration	1 jour	J-H-L
N : Installation (tables, décor)	2 jours	M
O : Faire la fête		N-M-K-I

Eléments de solution



 1 semaine  1 jour  2 jours

Elle doit s’y prendre 26 semaines à l’avance, soit le 13 janvier 2009.

Date	13/01	10/02	10/03	7/04	21/04	28/04	16/06
Action	A	B,C,D	E	F	G,J	H	I,K