

# LA RÉUNION

## Exercice n° 1 (Séries S-STI)

### Enoncé

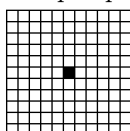
#### Le monstre

À l'instant 0, un monstre solitaire s'installe dans une case d'un réseau illimité à mailles carrées.

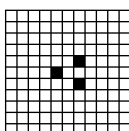
À chaque nouvel instant, tous les monstres existants meurent, mais chacun d'eux donne naissance à trois nouveaux monstres qui prennent places dans les cases situées immédiatement à gauche, en haut à droite et en bas à droite par rapport à la case laissée vide.

De plus, si deux monstres naissent dans la même case, ils s'entretuent instantanément.

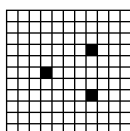
Les cinq premiers instants sont représentés ci-dessous, chaque case noircie étant occupée par un monstre.



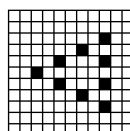
Instant 0



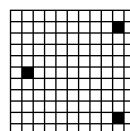
Instant 1



Instant 2



Instant 3



Instant 4

1. Représenter sur une feuille de papier quadrillé à petits carreaux les cinq instants suivants.
2. On considère uniquement les instants inférieurs ou égaux à 100.
  - (a) Quels sont les instants pour lesquels le nombre de monstres est égal à 3 ?
  - (b) À quel(s) instant(s) le nombre de monstres est-il le plus grand ?
  - (c) Quel est le nombre de monstres à l'instant 100 ?
3. Quel est le nombre de monstres à l'instant 2 009 ?

### Éléments de solution

1. Les représentations demandées ne présentent pas de difficultés. Elles doivent permettre d'analyser le processus...

2. a. A partir de chacune des trois cases occupées à l'instant 4, toute la séquence allant des instants 0 à 3 se reproduit ce qui conduit à l'instant 7. Les nombres de monstres aux instants compris entre 4 et 7 sont ainsi multipliés par 3 par rapport à ceux des instants 0 à 3. A l'instant 8, on retrouve une configuration où tous les nouveaux monstres s'entre-tuent sauf 3.

En assimilant les cases à des points, la configuration de l'instant 8 est l'image de celle de l'instant 4 par l'homothétie de rapport 2 et de centre le point initial. Il en était déjà de même entre les instants 4 et 2, de même qu'entre les instants 2 et 1.

L'espace nécessaire est ainsi dégagé pour que, à partir de chacune des trois cases occupées à l'instant 8, toute la séquence allant des instants 0 à 7 se reproduise jusqu'à l'instant 15. Les nombres de monstres aux instants compris entre 8 et 15 sont ainsi multipliés par 3 par rapport à ceux des instants 0 à 7. Et, à l'instant 16, on retrouve une configuration à 3 cases occupées homothétique dans un rapport 2 de celle de l'instant 8, ce qui permet au processus de se poursuivre...

Ainsi, le nombre de monstres est égal à 3 aux instants 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64, c'est-à-dire à tous les instants qui sont des puissances de 2.

- b. Le nombre de monstres atteint évidemment un maximum local à l'instant 63. Il reste à déterminer ce maximum et à examiner s'il peut être atteint à nouveau avant l'instant 100.

L'analyse de la question précédente permet de calculer de proche en proche le nombre de monstres  $f(n)$  à l'instant  $n$ . On obtient les résultats portés dans les tableaux suivants :

|        |    |    |    |    |    |     |    |    |    |    |    |    |    |    |
|--------|----|----|----|----|----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $n$    | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5   | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 |
| $f(n)$ | 1  | 3  | 3  | 9  | 3  | 9   | 9  | 27 | 3  | 9  | 9  | 27 | 9  | 27 |
| $n$    | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19  | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |    |    |
| $f(n)$ | 27 | 81 | 3  | 9  | 9  | 27  | 9  | 27 | 27 | 81 | 9  | 27 |    |    |
| $n$    | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31  |    |    |    |    |    |    |    |    |
| $f(n)$ | 27 | 81 | 27 | 81 | 81 | 243 |    |    |    |    |    |    |    |    |

La séquence suivante conduit de l'instant 32 à l'instant 63 auquel le nombre de monstres sera donc de  $243 \times 3$ , soit de 729. Ce nombre de 729 se retrouvera pour la première fois dans la séquence suivante, qui va des instants 64 à 127, à l'instant  $31 + 64$ , c'est-à-dire à l'instant 95.

**En conclusion, pour les instants inférieurs ou égaux à 100, le nombre de monstres atteint son maximum, égal à 729, aux instants 63 et 95.**

- c. On peut poursuivre la démarche ascendante de la question précé-

dente, éventuellement en programmant...

Mais, en remarquant que, pour tout entier naturel  $p$ , les nombres de monstres aux instants compris entre  $2^p$  et  $2^{p+1} - 1$  sont multipliés par 3 par rapport à ceux compris entre 0 et  $2^p - 1$ , on peut mettre en œuvre une démarche descendante.

Ainsi, en notant  $g(n)$  la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à  $n$ , on a :  $f(n) = 3 \times f(n - g(n))$ .

Cette formule donne successivement :

$$\begin{aligned} f(100) &= 3 \times f(100 - 64) = 3 \times f(36) = 3^2 \times f(36 - 32) = 3^2 \times f(4) \\ &= 3^3 \times f(4 - 4) = 3^3 \times f(0) = 3^3 = 27 \end{aligned}$$

**Le nombre de monstres à l'instant 100 est égal à 27 .**

3. On peut conserver la même démarche en présentant les étapes successives dans un tableau :

| $n$   | $g(n)$ | $n - g(n)$ |
|-------|--------|------------|
| 2 009 | 1 024  | 985        |
| 985   | 512    | 473        |
| 473   | 256    | 217        |
| 217   | 128    | 89         |
| 89    | 64     | 25         |
| 25    | 16     | 9          |
| 9     | 8      | 1          |
| 1     | 1      | 0          |

On obtient :  $f(2\,009) = 3^8 = 6\,561$ .

**A l'instant 2 009, le nombre de monstres sera de 6 561.**

Prolongement

La démarche décrite ci-dessus conduit à la formule générale :

$f(n) = 3^{k(n)}$  où  $k(n)$  est le nombre de « 1 » dans l'écriture de  $n$  en base 2.

## Exercice n° 2 (Série S)

### Enoncé

#### Pyramide

Une unité de longueur étant fixée et deux réels  $a$  et  $b$  strictement positifs étant donnés, on construit une pyramide SABCD dont la base ABCD est un carré et dont les faces latérales SAB, SBC, SCD et SDA sont des triangles isocèles isométriques tels que :

$$AB = BC = CD = DA = a \text{ et } SA = SB = SC = SD = b$$

1. Quelle est la condition nécessaire et suffisante portant sur  $a$  et  $b$  pour que la construction soit possible ?

Une fourmi veut relier le point A au point D par le plus court chemin possible, mais en se déplaçant uniquement sur les faces SAB, SBC et SCD.

2. (a) On suppose que  $a = 4$  et  $b = 3$ .  
Décrire dans ce cas le chemin que la fourmi doit suivre.
- (b) On suppose que  $a = 4$  et  $b = 8$ .  
Décrire dans ce cas le chemin que la fourmi doit suivre et calculer la longueur de ce chemin.
- (c) Généralisation : on suppose que  $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs quelconques vérifiant la condition trouvée à la question 1.  
Distinguer les différents cas possibles, décrire dans chaque cas le trajet que la fourmi doit suivre et exprimer la longueur de ce trajet en fonction de  $a$  et  $b$ .

## Eléments de solution

Voir les éléments de solution de l'exercice suivant.

## Exercice n° 3 (Séries autres que S)

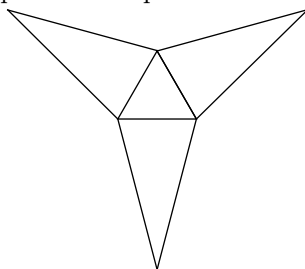
### Enoncé

#### Pyramide

Une pyramide SABC a une base ABC qui est un triangle équilatéral et des faces latérales SAB, SBC et SCA qui sont des triangles isocèles tels que :

$$AB = BC = CA = 4 \text{ cm et } SA = SB = SC = 8 \text{ cm}$$

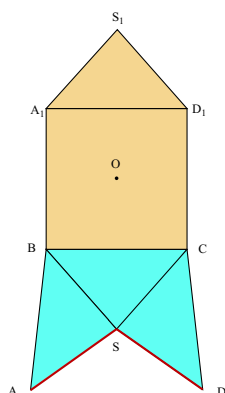
La figure ci-dessous représente un patron en réduction de cette pyramide.



1. Représenter en vraie grandeur un autre patron de cette pyramide pour lequel une seule face latérale devra être reliée au triangle de base.  
Une fourmi veut faire le tour de cette pyramide, du point A au point A, en se déplaçant sur les faces latérales et par le plus court chemin possible.
2. Décrire le chemin que la fourmi doit suivre et déterminer la longueur de ce chemin.

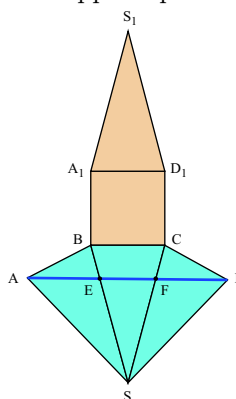
## Eléments de solution (Exercices 2 et 3)

1.  $a\sqrt{2}$  étant la longueur de la diagonale du carré de côté  $a$ .  
La construction d'une pyramide satisfaisant les conditions de l'énoncé est possible si et seulement si  $b \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .
2. a. On suppose que  $a = 4$  et  $b = 3$ .



Dans ce cas, le chemin que doit suivre la fourmi est celui passant par le sommet  $S$ .  
Sa longueur est  $AS + SD = 2b$ .

- b. On suppose que  $a = 4$  et  $b = 8$ .



Le chemin que doit suivre la fourmi correspond au chemin le plus court menant de  $A$  à  $D$  sur le patron, soit le segment  $[AD]$ . En remarquant que la médiatrice de  $[BC]$  est un axe de symétrie du patron, on obtient que les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  sont parallèles. On note  $E$  et  $F$  les points d'intersection de  $(AD)$  avec respectivement  $(SD)$  et  $(SC)$ .

Par des considérations d'angles égaux, on obtient que les triangles  $ABE$ ,  $SBC$  et  $SEF$  sont semblables.

On en déduit :

$$\frac{BE}{4} = \frac{4}{8} \text{ d'où } BE = 2,$$

$$\frac{EF}{4} = \frac{6}{8} \text{ d'où } EF = 3.$$

Par suite, la longueur du chemin est :  $AE + EF + FD = 11$ .

- c. **Généralisation** : on suppose que  $a$  et  $b$  sont des réels strictement positifs quelconques tels que  $b \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

- Lorsque  $b \leq a$ , on est dans la situation du 2.a : le plus court chemin est celui passant par le sommet S. Sa longueur est  $2b$ .
- Lorsque  $b \geq a$ , on est dans la situation du 2.b. On obtient :  
 $BE = CF = \frac{a^2}{b}$  et  $EF = a - \frac{a^3}{b^2}$ . La longueur du chemin est :  
 $3 - \frac{a^3}{b^2}$ .