

POITIERS

Exercice n° 1 (Toutes séries)

Enoncé

Explicitiez les calculs et raisonnements qui justifient le dialogue suivant où tous les nombres envisagés sont des entiers naturels.

- Quel est le reste de la division par 7 d'un carré ?
- Hum, on doit pouvoir s'en sortir en étudiant un nombre limité de cas. . .
- Si la somme de deux carrés est divisible par 7 alors les deux carrés sont, eux-mêmes, divisibles par 7 !
- Entendu, ils sont d'ailleurs tous divisibles par 49 !
- Au fait, 2009 est la somme de deux carrés !
- C'est vrai !
- On peut voir les choses autrement en considérant quatre nombres a , b , c et d . Si on développe l'expression

$$(ab - cd)^2 + (ac + bd)^2$$

on constate que c'est le produit de deux facteurs. . .

- Oui, c'est épatant ! Cela porte un nom ?
- On dit que c'est la formule de LAGRANGE, elle est très utile. Prends 1 105, c'est le produit de 3 nombres qui sont eux mêmes sommes de deux carrés !
- En effet, et grâce à la formule précédente, le produit de deux de ces facteurs est aussi la somme de deux carrés. . . Cela fait beaucoup de possibilités pour écrire 1 105 comme somme de deux carrés !
- Tu en trouveras 4 !
- C'est fait. Et 2 009, a-t-il aussi plusieurs décompositions en somme de deux carrés ?
- Tu peux utiliser la formule de LAGRANGE, mais cela ne donne qu'une seule décomposition.
- C'est normal, il n'y en a pas d'autres !

Eléments de solution

- *Quel est le reste de la division par 7 d'un carré ?*
C'est un nombre entier compris entre 0 et 6...
- *Hum, on doit pouvoir s'en sortir en étudiant un nombre limité de cas...*
En calculant les carrés de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, on trouve les restes suivants dans la division par 7 : 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1. Ensuite on retrouve périodiquement les mêmes restes. En effet si on ajoute 7 à un nombre, on ne change pas le reste de la division par 7 de son carré, auquel on a ajouté un multiple de 7 :

$$(n + 7)^2 = n^2 + 14n + 49 \text{ et } 7 \text{ divise } 14n + 49.$$

Les seuls restes possibles sont donc 0, 1, 2, 4.

- *Si la somme de deux carrés est divisible par 7 alors les deux carrés sont, eux-mêmes, divisibles par 7 !*
Si la somme de deux carrés est divisible par 7, c'est que la somme des restes dans la division par 7 est elle-même divisible par 7. Si on combine ainsi les différents restes possibles, il n'y a qu'une seule façon possible d'obtenir 7 ou 0, c'est de faire $0 + 0$!
Cela signifie que les deux carrés sont divisibles par 7.
- *Entendu, ils sont d'ailleurs tous divisibles par 49 !*
Oui puisque si le carré d'un nombre est divisible par 7, le nombre lui-même est divisible par 7. Le carré, en conséquence, est divisible par 49.
- *Au fait, 2 009 est la somme de deux carrés !*
2009 est divisible par 49 car $2\,009 = 49 \times 41$ et 41 est la somme de deux carrés : $41 = 25 + 16$. Donc 2 009 est bien la somme deux carrés :

$$2\,009 = 49 \times 25 + 49 \times 16 = 35^2 + 28^2.$$

- *C'est vrai !*
Et même, compte tenu de ce qui a été dit il semblerait bien que cette décomposition soit unique !
- *On peut voir les choses autrement en considérant quatre nombres a , b , c et d . Si on développe l'expression*

$$(ab - cd)^2 + (ac + bd)^2$$

on constate que c'est le produit de deux facteurs...

On a :

$$\begin{aligned} (ab - cd)^2 + (ac + bd)^2 &= a^2b^2 - 2abcd + c^2d^2 + 2abcd + b^2d^2 \\ &= a^2b^2 + a^2c^2 + c^2d^2 + b^2d^2 \\ &= (a^2 + d^2)(b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Cela mérite d'être encadré !

$$(ab - cd)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + d^2)(b^2 + c^2)$$

- Oui, c'est épatant ! Cela porte un nom ?
- On dit que c'est la formule de LAGRANGE, elle est très utile. Prends 1105, c'est le produit de 3 nombres qui sont eux mêmes sommes de deux carrés !

On a $1\ 105 = 5 \times 13 \times 17$ puis $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$ et $17 = 4^2 + 1^2$.

- En effet, et grâce à la formule précédente, le produit de deux de ces facteurs est aussi la somme de deux carrés... Cela fait beaucoup de possibilités pour écrire 1 105 comme somme de deux carrés !

1 105 est le produit de trois facteurs qui sont sommes de deux carrés.

En commençant par transformer le produit de deux d'entre eux en une somme de deux carrés avec la formule de LAGRANGE il restera à effectuer la transformation finale du produit de cette somme avec le troisième facteur. Comme il est possible de regrouper différemment les trois facteurs, nous pouvons envisager différentes décompositions. D'autant plus que les décompositions vont aussi dépendre de l'ordre dans lequel nous écrirons les décompositions intermédiaires !

- Tu en trouveras 4 !

Il peut être intéressant d'utiliser une notation pour simplifier l'application de la formule de LAGRANGE.

Nous noterons $a \bullet b = a^2 + b^2$.

Ainsi, conformément à LAGRANGE :

$$\begin{aligned} 5 \times 13 &= (1 \bullet 2) \times (2 \bullet 3) = 4 \bullet 7 \\ &= (2 \bullet 1) \times (2 \bullet 3) = 1 \bullet 8 \\ (5 \times 13) \times 17 &= (4 \bullet 7) \times (1 \bullet 4) = 24 \bullet 23 \\ &= (7 \bullet 4) \times (1 \bullet 4) = 9 \bullet 32 \\ &= (1 \bullet 8) \times (1 \bullet 4) = 31 \bullet 12 \\ &= (8 \bullet 1) \times (1 \bullet 4) = 4 \bullet 33 \end{aligned}$$

Nous en avons déjà 4... Si nous partons de $(5 \times 17) \times 13$ ou de $(13 \times 17) \times 5$ nous retrouvons les mêmes.

$$\boxed{1\ 105 = 24^2 + 23^2 = 9^2 + 32^2 = 31^2 + 12^2 = 4^2 + 33^2}$$

- C'est fait. Et 2 009, a-t-il aussi plusieurs décompositions en somme de deux carrés ?
- Tu peux utiliser la formule de LAGRANGE, mais cela ne donne qu'une seule décomposition. On a : $2\ 009 = 49 \times 41$, cette factorisation étant la seule dont les facteurs sont somme de deux carrés : $49 = 0^2 + 7^2$, $41 = 4^2 + 5^2$. L'identité de LAGRANGE nous permet d'écrire :

$$2\ 009 = 49 \times 41 = (0 \bullet 7) \times (4 \bullet 5) = 35 \bullet 28$$

On obtient la même décomposition si on échange 0 et 7 dans la décomposition de 49.

- C'est normal, il n'y en a pas d'autres !

Comme on l'a vu au début, sachant que 2 009 est divisible par 7, la

décomposition de 2 009 en somme de deux carrés sera factorisable par 49. Autrement dit la décomposition de 2 009 en somme de deux carrés se réduit à la décomposition de 41 en somme de deux carrés. Il suffit alors de retrancher à 41 tous les carrés inférieurs à 41 pour vérifier si ce qui reste est un carré ; on ne trouve qu'une seule possibilité : $41 = 25 + 16$!

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

La chèvre de Monsieur Seguin

L'herbe est bien haute autour de la bergerie de Monsieur Seguin. Il faudrait tondre. Blanquette, son inséparable chèvre, va s'en charger. Monsieur Seguin l'attache au bout d'une corde et fixe l'autre bout de la corde à un piquet planté **le long d'un des murs** de la bergerie.

La chèvre peut ainsi brouter toutes les herbes que la corde lui permet d'atteindre.

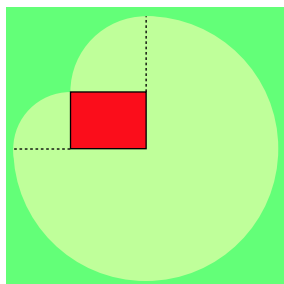
La base de la bergerie est un rectangle de 6 m de long sur 4 m de large, et la longueur de la corde disponible pour les mouvements de la chèvre est de 10 m. On suppose que le terrain est bien plan et on assimile le piquet et la chèvre à des points.

- 1- Calculer l'aire exacte que peut brouter Blanquette si monsieur Seguin plante son piquet à l'un des coins de la bergerie.
- 2- Montrer que monsieur Seguin doit justement placer son piquet à l'un de ces coins s'il veut que Blanquette broute une aire maximale.

Eléments de solution

- 1- Quand le piquet est planté à un coin de la bergerie, la chèvre peut brouter l'aire :

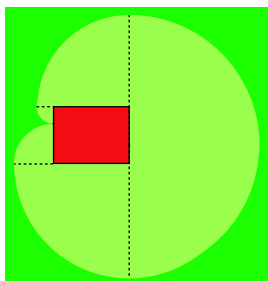
$$\frac{3}{4}\pi 10^2 + \frac{1}{4}\pi 4^2 + \frac{1}{4}\pi 6^2 = 88\pi.$$



- 2- Si le piquet est planté sur une largeur de la bergerie à une distance x d'un des deux coins, l'aire que la chèvre peut brouter est

$$\frac{1}{2}\pi 10^2 + \frac{1}{4}\pi(10-x)^2 + \frac{1}{4}\pi(4-x)^2 + \frac{1}{4}\pi(6+x)^2 + \frac{1}{4}\pi x^2 = (88+x(x-4))\pi \leq 88\pi,$$

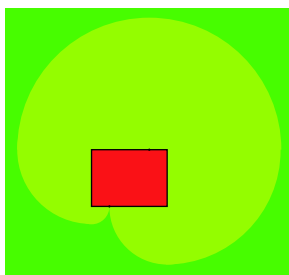
car pour $0 \leq x \leq 4$, $x(x-4) \leq 0$.



Si le piquet est planté sur une longueur de la bergerie à une distance y d'un des deux coins, l'aire que la chèvre peut brouter est

$$\frac{1}{2}\pi 10^2 + \frac{1}{4}\pi(10-y)^2 + \frac{1}{4}\pi(6-y)^2 + \frac{1}{4}\pi(4+y)^2 + \frac{1}{4}\pi y^2 = \pi(88+y(y-6)) \leq 88\pi$$

car pour $0 \leq y \leq 6$, $y(y-6) \leq 0$.



Dans tous les cas l'aire est inférieure à celle que la chèvre peut brouter lorsque le piquet est planté à l'un des coins de la bergerie !

Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Quatre filles et cinq garçons...

Les quatre filles du docteur Marc

Les quatre filles du Dr. Marc sont toutes nées un 11 mars. Aujourd'hui c'est le jour de l'anniversaire collectif et, pour la première fois, le nombre de diviseurs de l'âge de l'aînée est strictement inférieur au nombre de diviseurs de l'âge

de la deuxième, qui est lui-même strictement inférieur au nombre de diviseurs de l'âge de la troisième, qui est bien sûr strictement inférieur au nombre de diviseurs de l'âge de la plus jeune.

- 1- Quel est, au minimum, l'âge de l'aînée des quatre sœurs Marc ?
- 2- En supposant que l'aînée ait bien l'âge minimum demandé dans la première question, dans combien d'années cette curieuse situation se reproduira-t-elle pour la première fois ? (à condition, évidemment, que les quatre sœurs vivent jusqu'à ce moment.)

Les cinq fils du docteur April

Les cinq fils du Dr April sont tous nés un 1^{er} avril. Lors de leur anniversaire collectif, le 1/4/2009, leur père s'est exclamé : « Les différences d'âge entre deux quelconques d'entre eux sont toutes différentes ! ».

- 1- Quel est, au minimum, l'âge de l'aîné des cinq frères April ?
- 2- En supposant que l'aîné ait bien l'âge minimum demandé dans la première question, dans combien d'années au minimum aucun des cinq âges ne sera-t-il un nombre premier ?

Éléments de solution

Les quatre filles du docteur Marc

- 1- L'âge de l'aînée ayant au moins 2 diviseurs, celui de la benjamine en a au moins 5.

Le plus petit entier naturel ayant au moins 5 diviseurs est 12 (6 diviseurs).

Il conduit aux deux solutions :

- 12 ans (6 diviseurs)
- 16 ans (5 diviseurs)
- 21 ou 22 ans (4 diviseurs)
- 23 ans (2 diviseurs)

Dans les deux cas, l'âge de l'aînée est 23 ans.

- 2- Il faut, de façon analogue, que le nombre de diviseurs de $12 + n$ soit au moins égal à 5.

La plus petite valeur de n qui convienne est 24 avec les âges correspondants :

- 36 ans (9 diviseurs)
- 40 ans (8 diviseurs)
- 45 ou 46 ans (6 ou 4 diviseurs)
- 47 ans (2 diviseurs)

Cette situation se reproduira donc dans 24 ans, le 11 mars 2033.

Les cinq fils du docteur April

- 1- Entre les cinq âges, il y a 10 différences qui doivent être toutes différentes, et non nulles.

La plus grande d'entre elles est donc au moins égale à 10. Le plus jeune ayant au moins 1 an, l'aîné a au moins 11 ans, mais il est impossible de parvenir à des différences satisfaisantes avec cette valeur, comme avec la suivante 12. En revanche, avec 13 ans pour l'aîné, on parvient aux deux répartitions symétriques : 1 an, 2 ans, 4 ans, 8 ans, 13 ans et 1 an, 6 ans, 10 ans, 12 ans, 13 ans. Dans ces deux cas, les différences sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12. L'âge de l'aîné est donc, au minimum 13 ans.

- 2- Selon qu'on choisira un nombre d'années n pair ou impair, les fils à tester seront ceux dont l'âge actuel est de parité opposée (hormis le cas $n = 1$, à disqualifier immédiatement).

La plus petite valeur qui convienne est, dans les deux cas, $n = 8$, avec les âges : 9 ans, 10 ans, 12 ans, 16 ans et 21 ans ou 9 ans, 14 ans, 18 ans, 20 ans et 21 ans.

Cette situation se produira 8 ans plus tard, le 1^{er} avril 2017.