

PARIS

Exercice n° 1 (Toutes séries)

Enoncé

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note F_n la liste finie, ordonnée dans l'ordre strictement croissant, des nombres rationnels $\frac{p}{q}$ tels que $0 < p \leq q \leq n$ avec p et q premiers entre eux.

Ainsi $F_2 = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ et $F_3 = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; 1\right)$.

1- Déterminer F_4 et F_5 .

2- Montrer que si $\frac{p'}{q'}$ est le successeur de $\frac{p}{q}$ dans F_n alors

a. $\frac{p}{q} < \frac{p+p'}{q+q'} < \frac{p'}{q'}$;

b. $q+q' > n$.

3- On admet que $\frac{r}{s}$ est le successeur de $\frac{p}{q}$ dans F_n si et seulement si r et s sont des entiers positifs tels que $r \times q - s \times p = 1$ et $n - q < s \leq n$.

a. Montrer que $s \neq q$.

b. Déterminer le successeur de $\frac{13}{25}$ dans F_{50} .

Eléments de solution

1. $F_4 = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; 1\right)$.

2. a. Comparaison de deux termes consécutifs

$$\frac{p}{q} - \frac{p+p'}{q+q'} = \frac{pq' - p'q}{q(q+q')}$$

car par hypothèse $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ donc $pq' - p'q < 0$.

- b. si $q+q' \leq n$, alors $\frac{p+p'}{q+q'}$ est un élément de F_n ce qui est en contradiction avec l'hypothèse : $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ sont deux termes consécutifs de F_n .
3. a. Si $s = q$, alors $q(r-p) = 1$, ce qui donne $q = 1$ et $r-p = 1$. Comme $p \leq q$, on a $p = q = 1$, finalement $\frac{p}{q} = 1$ et donc $\frac{p}{q}$ n'a pas de successeur dans F_n .
- b. Le successeur $\frac{r}{s}$ de $\frac{13}{25}$ dans F_{50} vérifie :

$$25r + 13s = 1 \text{ et } 50 - 25 < s$$

ce qui donne $50 > s > 25$ et $13s$ est un nombre se terminant par 4 ou 9. Il faut donc tester 28, 33, 38, 43 et 48. On constate que seul $s = 48$ convient avec $r = 25$.

Exercice n° 2 (Toutes séries)

Énoncé

ABC est un triangle rectangle en C. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$. On suppose que b et c sont des entiers naturels et que $a = 2009$. Déterminer la plus petite valeur de b .

Éléments de solution

Soit d l'entier naturel égal à $c - b$, on a, d'après le théorème de Pythagore $(b+d)^2 = b^2 + 2009^2$ ou encore $d(2b+d) = 2009^2 = 7^4 \times 41^2$.

Donc d est un diviseur de $2009^2 = 7^4 \times 41^2$. La plus grande valeur de d est $41^2 = 1681$ (la valeur immédiatement supérieure est $41 \times 7^2 = 2009$ pour laquelle $b = 0$). Il s'en suit que si b est non nul, on a $b = 360$ et $c = 2041$. On vérifie que $2041^2 = 2009^2 + 360^2$.