

# ORLÉANS

## Exercice n° 1 (Série S)

### Enoncé

#### Simplifications scandaleuses

Un élève a écrit  $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$ , ce qui est juste mais il explique qu'il a obtenu cette égalité en « simplifiant par 6 » :  $\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$ .

1. Montrer à l'aide d'un exemple qu'une simplification de ce type n'est pas toujours possible. Dans la suite de l'exercice,  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des nombres entiers pris parmi les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

On précise que la notation  $\overline{ab}$  représente l'entier dont l'écriture décimale admet  $b$  pour chiffre des unités et  $a$  pour chiffres des dizaines. Autrement dit :  $\overline{ab} = b + 10a$ , la barre placée au dessus des chiffres  $a$  et  $b$  permettant d'éviter une éventuelle confusion avec le produit  $ab$ .

De même  $\overline{abc}$  représente l'entier dont l'écriture décimale admet  $c$  pour chiffre des unités,  $b$  pour chiffres des dizaines et  $a$  pour chiffre des centaines. Autrement dit :  $\overline{abc} = c + 10b + 100a$ , etc.

2. Le but de cette question est de déterminer toutes les fractions du type

$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$  où la « simplification scandaleuse »  $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$  est possible.

- (a) Démontrer que l'on a l'égalité  $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$  si et seulement si  $b = \frac{9ac}{10a - c}$ .
- (b) En examinant tous les cas possibles pour les chiffres  $a$  et  $c$ , indiquer toutes les fractions du type  $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$  où la « simplification scandaleuse » est possible.

3. On s'intéresse maintenant aux fractions telles que  $\frac{\overline{abb}}{\overline{bbc}} = \frac{a}{c}$ .

- (a) Exprimer  $b$  en fonction de  $a$  et  $c$  pour que l'on ait l'égalité  $\frac{\overline{abb}}{\overline{bbc}} = \frac{a}{c}$ .

(b) En déduire toutes les fractions du type  $\frac{\overline{abb}}{\overline{bbc}}$  où la « simplification

scandaleuse »  $\frac{\overline{abb}}{\overline{bbc}} = \frac{a}{c}$  est possible.

4. Conjecturer quelles sont les fractions du type  $\frac{\overline{ab\dots b}}{\overline{b\dots bc}}$  (avec 2009 chiffres  $b$  au numérateur et au dénominateur) où la « simplification scandaleuse »  $\frac{\overline{ab\dots b}}{\overline{b\dots bc}} = \frac{a}{c}$  est possible.

## Eléments de solution

1.  $\frac{35}{56} \neq \frac{3}{6}$  par exemple.

2. a)  $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (10a + b)c = (10b + c)a \Leftrightarrow 9ac + bc = 10ab \Leftrightarrow b = \frac{9ac}{10a - c}$ .  
b)

| $c \backslash a$ | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       | 6       | 7       | 8       | 9       |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1                | $b = 1$ |         |         |         |         |         |         |         |         |
| 2                |         | $b = 2$ |         |         |         |         |         |         |         |
| 3                |         |         | $b = 3$ |         |         |         |         |         |         |
| 4                | $b = 6$ |         |         | $b = 4$ |         |         |         |         |         |
| 5                | $b = 9$ | $b = 6$ |         |         | $b = 5$ |         |         |         |         |
| 6                |         |         |         |         |         | $b = 6$ |         |         |         |
| 7                |         |         |         |         |         |         | $b = 7$ |         |         |
| 8                |         |         |         | $b = 9$ |         |         |         | $b = 8$ |         |
| 9                |         |         |         |         |         |         |         |         | $b = 9$ |

On obtient donc 13 solutions :

$$\frac{11}{11} ; \frac{16}{64} ; \frac{19}{95} ; \frac{22}{22} ; \frac{26}{65} ; \frac{33}{33} ; \frac{44}{44} ; \frac{49}{98} ; \frac{55}{55} ; \frac{66}{66} ; \frac{77}{77} ; \frac{88}{88} ; \frac{99}{99}.$$

3.

- a.  $\frac{\overline{abb}}{\overline{bbc}} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (100a - 11b)c = (110b + c)a \Leftrightarrow 99ac + 11bc = 110ab$   
 $\Leftrightarrow 9ac + bc = 10ab$ .

Ainsi :  $\frac{\overline{abb}}{\overline{bbc}} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$ .

- b. On obtient donc 13 solutions :

$$\frac{111}{111} ; \frac{166}{664} ; \frac{199}{995} ; \frac{222}{222} ; \frac{266}{665} ; \frac{333}{333} ; \frac{444}{444} ; \frac{499}{998} ; \frac{555}{555} ; \frac{666}{666} ; \frac{777}{777} ; \frac{888}{888} ; \frac{999}{999}.$$

4. Plus généralement,  $\frac{\overline{ab\dots b}}{\overline{b\dots bc}} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow 9ac + bc = 10ab$ .

Ainsi  $\frac{\overline{ab\dots b}}{\overline{b\dots bc}} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}.$

Ce qui donne comme solutions :

$$\bullet \frac{1 \overbrace{1\dots 1}^{n \text{ chiffres}}}{\underbrace{1\dots 1}_{n \text{ chiffres}} 1} = \frac{1}{1} \text{ et les autres avec comme chiffres que des 2, des 3, des 4 etc.}$$

$$\bullet \frac{1 \overbrace{6\dots 6}^{n \text{ chiffres}}}{\underbrace{6\dots 6}_{n \text{ chiffres}} 4} = \frac{16}{64} = \frac{1}{6}$$

$$\bullet \frac{1 \overbrace{9\dots 9}^{n \text{ chiffres}}}{\underbrace{9\dots 9}_{n \text{ chiffres}} 5} = \frac{19}{95} = \frac{1}{5}$$

$$\bullet \frac{2 \overbrace{6\dots 6}^{n \text{ chiffres}}}{\underbrace{6\dots 6}_{n \text{ chiffres}} 5} = \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

$$\bullet \frac{4 \overbrace{9\dots 9}^{n \text{ chiffres}}}{\underbrace{9\dots 9}_{n \text{ chiffres}} 8} = \frac{49}{98} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

### Avec la calculatrice par A. Guillemot

2. a) Comme  $a$  et  $b$  sont différents de 0,  $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{b}$  si et seulement si  $c(10a + b) = a(10b + c)$ .  
 $c(10a + b) = a(10 + c)$  si et seulement si  $b = \frac{9ac}{10a - c}$ .

- b) Remarquons que si  $a = c$ , nous avons  $a = b = c$ . Nous avons donc là neuf fractions « simplifiables » de la forme  $\frac{\overline{aa}}{\overline{aa}}$ .

Pour trouver les autres fractions « simplifiables », il suffit d'utiliser un petit programme qui utilise la relation trouvée dans la question précédente en faisant varier  $a$  et  $c$  de 1 à 9 avec  $a \neq c$ .  $b$  devra être un entier inférieur à 10.

```

PROGRAM:TOURS1
:For(A,1,9)
:For(C,1,9)
:9A*C/(10A-C)+B
:If fPart(B)=0 a
nd A#C and B≤9
:Disp (A,B,C)
:End:End■

```

En lançant le programme, on trouve quatre solutions supplémentaires

```

PrgrmTOURS1      Done
(1 6 4)
(1 9 5)
(2 6 5)
(4 9 8)
Done
■

```

qui sont  $\frac{16}{64}$  ;  $\frac{19}{95}$  ;  $\frac{26}{65}$  ;  $\frac{49}{98}$ .

Remarque : on peut trouver ces quatre solutions directement avec le programme suivant (on fait varier  $a$ ,  $b$  et  $c$  de 1 à 9 avec  $a \neq b$  et

on affiche  $a$ ,  $b$  et  $c$  quand  $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{a}{c}$ .

```

PROGRAM:TOURS
:For(A,1,9)
:For(B,1,9)
:For(C,1,9)
:If (10A+B)/(10B
+C)=A/C and A#B
:Disp (A,B,C)
:End:End:End

```

3. Nous avons déjà comme solutions les neuf cas où  $a = b = c$  comme précédemment. Pour trouver les autres cas, modifions légèrement le programme précédent.

```

PROGRAM:TOURS
:For(A,1,9)
:For(B,1,9)
:For(C,1,9)
:If (100A+11B)/(
110B+C)=A/C and
A#B
:Disp (A,B,C)

```

```

PrgrmTOURS      (1 6 4)
                  (1 9 5)
                  (2 6 5)
                  (4 9 8)
                  Done
■

```

Et on trouve les mêmes valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  qu'à la question précédente.

## Exercice n° 2 (Série S)

### Enoncé

#### MILA est très carré...

Le Docteur Watson rapporte à Sherlock Holmes une affaire étonnante : « Mon

cher Holmes, j'ai lu cette énigme dans le « Times » :

*Le Colonel Mila, agent secret surnommé « Mila le carré » dans les milieux du contre-espionnage pour sa carrure herculéenne, a disparu hier en laissant derrière lui les plans d'un sous-marin. Or, il se fait que le Colonel a caché ces plans dans l'une des cabines d'un paquebot lors de son dernier voyage. On ne connaît pas le numéro de la cabine, ni le pont sur lequel elle se trouve, mais on dispose des indications suivantes :*

- *ABC est un triangle tel que  $BC = 8$  cm.*
- *Les points I, J et K sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].*
- *Le point M est le symétrique du point J par rapport au point K, et le point L est le symétrique du point K par rapport au point J.*
- *Le quadrilatère MILA a au moins un angle droit.*
- *Le numéro du pont est donné par la longueur en cm du segment [AI], et celui de la cabine par la mesure en  $\text{cm}^2$  de l'aire du quadrilatère MILA ».*

### 1<sup>ère</sup> PARTIE

Retrouver le numéro du pont sur le lequel se trouve la cabine du Colonel Mila.

### 2<sup>ème</sup> PARTIE

Holmes réfléchit et, un peu agacé, dit :

« Il doit certainement manquer un élément dans votre énigme, mon cher Watson ! ».

Watson répond : « Ah, oui ! Je n'avais pas vu la fin... Il est aussi écrit que :

*Le quadrilatère MILA est un carré.*

Qu'en pensez-vous, mon cher Holmes ? ».

Retrouver le numéro de la cabine dans laquelle se trouvent les plans cachés par le colonel Mila, avant de pouvoir répliquer :

« Élémentaire, mon cher Watson ! ».

### 3<sup>ème</sup> PARTIE

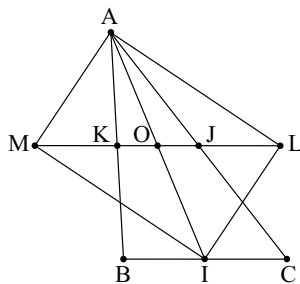
Piqué au vif, Watson poursuit seul la lecture de l'article :

*« L'espion avait aussi caché les plans d'une base navale alliée dans une autre cabine dont le numéro est donné par la mesure de l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du pentagone CLAMB ».*

Sachant que le quadrilatère MILA est un carré, déterminer dans quelle cabine se trouvent les plans de la base navale.

## Eléments de solution

### 1<sup>ère</sup> PARTIE



Les diagonales  $[AI]$  et  $[KJ]$  du quadrilatère MILA, se coupent au point O.

D'après la propriété de la droite des milieux, on peut affirmer que les droites  $(KJ)$  et  $(BC)$  sont parallèles. En utilisant la propriété réciproque on prouve que le point O est milieu du segment  $[AI]$ . En utilisant à nouveau cette propriété dans les triangles ABI et ACI, on démontre que

$$KO = \frac{1}{2}BI \text{ et que } JO = \frac{1}{2}CI.$$

Par symétrie, on a  $MK = KJ = JL$ .

De plus on a  $KJ = BI = IC$ .

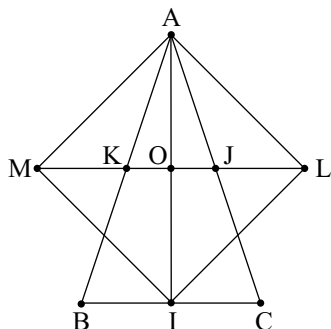
Ainsi  $MO = MK + KO = BI + \frac{1}{2}BI = 6 \text{ cm}$  et  $LO = LJ + JO = BI + \frac{1}{2}BI = 6 \text{ cm}$ .

Les points M, O, L étant alignés, on peut en déduire que le point O est milieu du segment  $[ML]$ .

Les diagonales  $[AI]$  et  $[ML]$  ont donc même milieu O, ce qui prouve que MILA est un parallélogramme. De plus le parallélogramme MILA possède un angle droit donc il s'agit d'un rectangle, dont les diagonales sont de même longueur. Ainsi  $AI = ML = 3 \times MK = 3 \times BI = 12 \text{ cm}$ .

**La cabine du colonel MILA se trouve au pont numéro 12.**

### 2<sup>ème</sup> PARTIE



L'aire du carré MILA est égale au quadruple de celle du triangle AOM.

L'aire de AOM est égale à  $\frac{AO \times OM}{2}$ .

$AO = OM = 6 \text{ cm}$  car MILA est un carré qui a des diagonales de même longueur.

L'aire de MILA vaut donc  $4 \times \frac{6 \times 6}{2} = 72 \text{ cm}^2$ .

**Le numéro de la cabine du colonel MILA est 72.**

### 3<sup>ème</sup> PARTIE

L'aire du pentagone CLAMB est égale à la somme de l'aire du carré MILA et des aires des deux triangles BIM et CIL.

Les triangles BIM et CIL ont même aire par symétrie.

L'aire du triangle BIM est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme MBIK

qui vaut  $\frac{BI \times OI}{2}$  car les droites (OI) et (MK) sont perpendiculaires puisque

MILA est un carré.

L'aire du triangle BIM vaut donc  $12 \text{ cm}^2$ .

(On peut aussi remarquer que les triangles BIM et BIO ont la même aire puisque les droites (MO) et (BI) sont parallèles.)

Finalement l'aire du pentagone CLAMB vaut  $72 + 12 + 12 = 96 \text{ cm}^2$ .

**Les plans de la base navale se trouvent dans la cabine numéro 96.**