

NICE

Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

2009 - Année étoilée !

On s'intéresse aux nombres entiers non nuls N possédant la propriété (*) suivante :

N peut s'écrire comme somme de deux entiers dont le produit est divisible par N , c'est-à-dire qu'il existe deux entiers a et b tels que

$$N = a + b \text{ avec } a + b \text{ diviseur de } ab (*)$$

On appellera composantes de N , des entiers a et b convenables et on pourra dire N est étoilé.

Exemple : 9 est étoilé car $9 = 3 + 6$ et $3 \times 6 = 18$ est divisible par 9.

On dit que le nombre entier N est un carré parfait s'il existe un nombre entier a tel que $a^2 = N$.

On dit qu'un nombre entier est premier s'il est plus grand que 1 et s'il n'est divisible que par 1 et par lui-même.

1. Trouver tous les nombres entiers jusqu'à 20 qui sont étoilés et ceux qui ne le sont pas.
2. Montrer que 25 et 36 sont étoilés, puis montrer que si N est un carré parfait alors N est étoilé.
3. Soit N un entier étoilé et p un diviseur premier de N ($p > 1$) ; montrer que p divise les deux composantes de N .
4. Montrer que 2009 est étoilé.
5. Montrer que si $N = p \times q$ avec p et q premiers distincts alors N n'est pas étoilé. Que dire de 2010 ?
6. Soit N un nombre entier non nul, donner une condition nécessaire et suffisante pour que N soit étoilé.

Solution (P.L.H.)

1. Sont étoilés :

$4 = 2 + 2$, $8 = 4 + 4$, $9 = 3 + 6$, $12 = 6 + 6$, $16 = 8 + 8$, $18 = 12 + 6$,
 $20 = 10 + 10$.

Si N est premier, a et b sont égaux à 1 ou à N et on a l'unique décomposition $N = 1 + (N - 1)$, mais N ne divise pas $1 \times (N - 1) = N - 1$.
 N n'est pas étoilé.

On en déduit que 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19 ne sont pas étoilés.

Il reste 6, 10, 14, 15, produits de deux nombres premiers distincts qui ne sont pas étoilés (cf. question 5).

2. $25 = 5 + 20$ et $36 = 18 + 18$ sont étoilés car 25 divise $5 \times 20 = 100$ et 36 divise $18 \times 18 = 36 \times 9$.

Si N est un carré, $N = k^2 = k + N - k = k + (k^2 - k)$ et k^2 divise le produit $k(k^2 - k) = k^2(k - 1)$: N est étoilé.

3. $N = a + b$ et N divise ab . Si p premier divise N , il divise ab donc a ou b .
 Supposons qu'il divise a , il divise aussi $N - a = b$.

4. $2\ 009 = 7^2 \times 41 = 6 \times 7 \times 41 + 7 \times 41$
 et $(6 \times 7 \times 41) \times (7 \times 41) = (6 \times 41) \times (7^2 \times 41)$ est bien un multiple de 2 009 ; 2 009 est étoilé.

5. Si $p \times q$ était étoilé, il existerait a compris entre 1 et $pq - 1$ tel que pq diviserait $a(pq - a)$ donc a^2 donc a si $p \neq q$. Mais ceci est incompatible avec la condition $a \leq N - 1$.

$2\ 010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$ est le produit de quatre facteurs premiers distincts ; chacun d'eux divise a ce qui est incompatible avec la condition $1 \leq a \leq 2\ 009$.

2 010 n'est pas étoilé.

6. N est étoilé si et seulement si, dans sa décomposition en facteurs premiers, figure au moins un facteur multiple :

- Si cette condition est remplie, $N = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_e^{k_e}$ avec $p_1, p_2, \dots, p_e$ premiers distincts et un des k_i au moins égal à 2.

Soit $N = p^k M$ avec $k \geq 2$;

En posant $a = p^{k-1} M$ et $b = N - a = p^{k-1}(p - 1)M$, on a bien $a + b = N$ et N divise $ab = p^{2(k-1)}(p - 1)M^2$ car $2(k - 1) \geq k$.

N est étoilé.

- Si cette condition n'est pas remplie, $N = p_1 p_2 \dots p_e$ doit diviser a^2 donc a , mais alors $a \geq p_1 p_2 \dots p_e$.

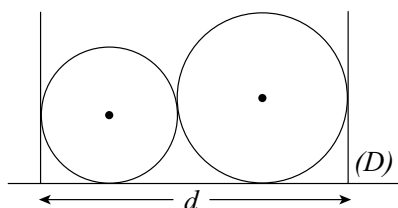
N n'est pas étoilé.

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Rangements...

1.



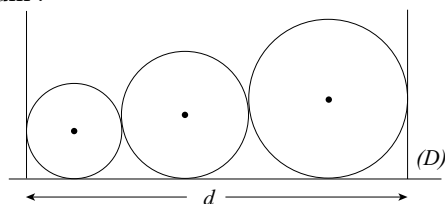
Deux ballons sont posés côte à côte comme le suggère le dessin ci-contre (les deux cercles sont tangents entre eux et à la droite (D)). L'un des ballons a pour rayon 9 cm.

Si l'autre ballon a pour rayon 4 cm, que vaut la distance d ?

Si la distance $d = 30$ cm, que vaut le rayon du deuxième ballon ?

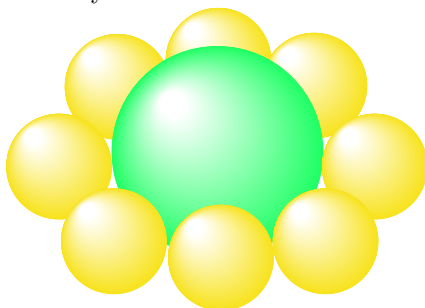
Mais si la distance vaut 18 cm, que vaut alors le rayon du deuxième ballon ?

2. Je veux ranger maintenant 3 ballons de rayons respectifs 3, 4 et 5 cm, disposés côte à côte comme précédemment (les 3 cercles sont tangents entre eux et tangents à une droite (D)). Dans quel ordre les disposer pour avoir la longueur d minimum ?



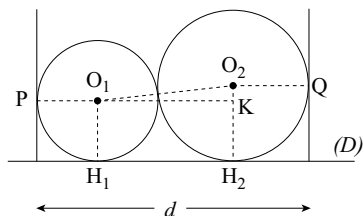
Si les ballons ont pour rayons respectifs r_1 , r_2 et r_3 , peut-on généraliser le résultat obtenu ?

3. Toujours pour gagner de la place, j'ai disposé mes 8 balles de tennis autour d'un ballon de telle sorte que les 8 balles soient tangentes entre elles, tangentes au plan sur lequel elles sont posées et tangentes au ballon qui a 4 cm de rayon. Quel est le rayon des balles de tennis ?



Eléments de solution (P.L.H.)

1. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les deux cercles, O_1 et O_2 leurs centres, r_1 et r_2 leurs rayons, H_1 et H_2 les projections orthogonales de O_1 et O_2 sur (D) , avec H_1 à gauche de H_2 , K la projection orthogonale de O_1 sur (H_2O_2) .



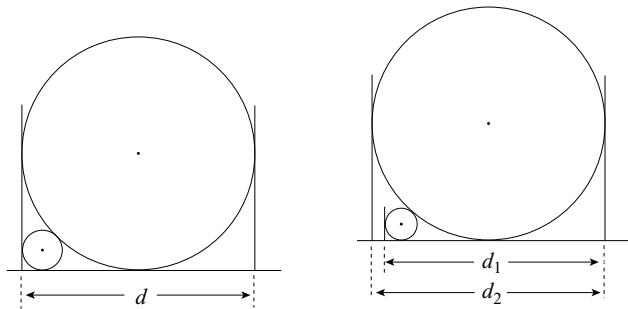
Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle O_1KO_2 donne

$$O_1O_2^2 = O_1K^2 + KO_2^2$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } O_1K^2 &= (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 \\ &= 4r_1r_2. \end{aligned}$$

On en déduit $d = r_1 + 2\sqrt{r_1r_2} + r_2 = (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2$.

- si $r_1 = 4$ et $r_2 = 9$, $d = (2 + 3)^2 = 25$.
- Si $r_2 = 9$ et $d = 30$, $(\sqrt{r_1} + 3)^2 = 30$, $\sqrt{r_1} + 3 = \sqrt{30}$
 $r_1 = (\sqrt{30} - 3)^2 = 30 - 6\sqrt{3} + 9 = 21 - 6\sqrt{3}$.
- Si $r_1 = 9$ et $d = 18$, la formule ci-dessus nous donne $\sqrt{r_1} + 3 = \sqrt{18}$
 ou $r_1 = 27 - 18\sqrt{2} = 1,544$.



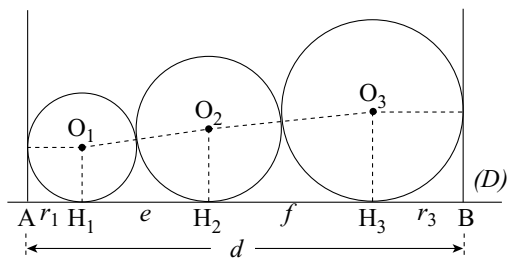
Cet exemple nous montre la nécessité de préciser ce qu'est la « distance d » définie uniquement par la première figure de l'énoncé, dans le cas où $r_1 < 1,544$.

- S'agit-il de la distance calculée plus haut, $d_1 = (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2$, qui mesure la distance entre la parallèle à (O_2H_2) tangente à gauche à $\mathcal{C}_1$ et la parallèle à (O_2H_2) tangente à droite à $\mathcal{C}_2$?
 Si $d_1 = 18$, $r_1 = 1,544$.

- S'agit-il de la longueur du segment projection sur (D) de la réunion des deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$? Dans ce cas, $d = 18$ pour tout cercle $\mathcal{C}_1$ tangent à $\mathcal{C}_2$ et à (D) et de rayon inférieur à 1,544.

La bonne réponse est alors : $r_1 \leq 1,544$.

2. Numérotons H_1, H_2, H_3 de la gauche vers la droite de sorte que $\mathcal{C}_2$ est tangent à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_3$, sauf dans le cas **C**.



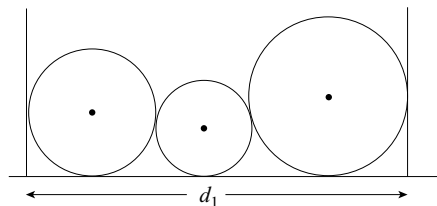
Posons $H_1H_2 = e$ et $H_2H_3 = f$.

Alors $d = r_1 + e + f + r_3$, avec $(r_2 + r_1)^2 = e^2 + (r_1 - r_2)^2$ ou $e = 2\sqrt{r_1r_2}$ et $(r_2 + r_3)^2 = f^2 + (r_3 - r_2)^2$ ou $f = 2\sqrt{r_2r_3}$.

Dans le cas des rayons 3, 4, 5, d ainsi calculée est aussi la longueur du segment $[AB]$ projection sur (D) de la réunion des trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

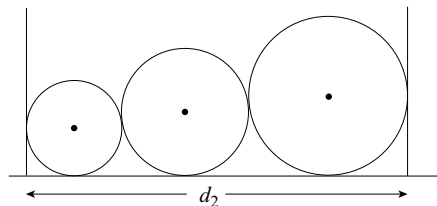
Nous avons 6 permutations possibles pour la taille des ballons, qui se ramènent à 3 par symétrie autour de la médiatrice de $[AB]$.

- $r_2 = 3$ (et $r_1 = 4, r_3 = 5$ ou $r_1 = 5, r_3 = 4$) (Le petit ballon est entre les deux autres).



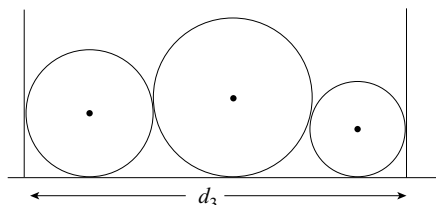
$$d = d_1 = 9 + 2\sqrt{3}(\sqrt{4} + \sqrt{5}) = 23,673.$$

- $r_2 = 4$ (et $r_1 = 3, r_3 = 5$ ou $r_1 = 5, r_3 = 3$) (le ballon moyen est entre les deux autres).



$$d = d_2 = 8 + 4(\sqrt{3} + \sqrt{5}) = 24,872.$$

- $r_2 = 5$ (et $r_1 = 3$, $r_3 = 4$ ou $r_1 = 4$, $r_3 = 3$) (le gros ballon est entre les deux autres).

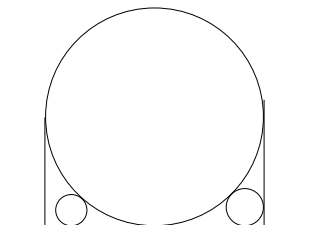


$$d = d_3 = 7 + 2\sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{4}) = 23,689.$$

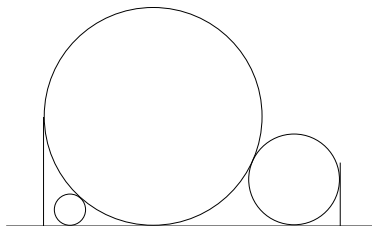
C'est donc la première disposition qui donne à d la valeur minimum $d = d_1$, mais la différence avec la troisième est vraiment minime. Dans le cas général, nous cherchons à minimiser la longueur d de la projection sur (D) de la réunion des trois cercles $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ numérotés de gauche à droite. Nous notons r_1, r_2, r_3 leurs trois rayons. $\mathcal{C}_2$ est tangent à $\mathcal{C}_1$ et à $\mathcal{C}_3$ (sauf dans le cas où $\mathcal{C}_1$ est tangent à $\mathcal{C}_2$ et à $\mathcal{C}_3$). $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont tangents à (D) . Nous notons u_1, u_2, u_3 ordonnés dans l'ordre croissant la racine carrée de ces trois rayons. Nous supposons $u_3 = 1$, cas auquel on se ramène par homothétie. On a donc $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$.

Nous représentons l'une des deux dispositions symétriques des trois cercles dans les divers cas, puis, dans une figure récapitulative, le réagionnement dans le plan $(u_1 u_2)$.

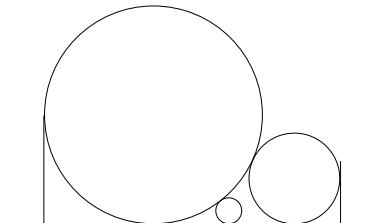
Cas A : $r_1 = u_1^2$, $r_2 = 1$, $r_3 = u_2^2$
 (ou $r_1 = u_2^2$, $r_3 = u_1^2$)
 $u_1 \leq u_2 \leq \sqrt{2} - 1$
 $d_{min} = 2$.



Cas B : $r_1 = u_1^2$, $r_2 = 1$, $r_3 = u_2^2$
 (ou $r_1 = u_2^2$, $r_3 = u_1^2$)
 $u_1 \leq \sqrt{2} - 1 \leq u_2$
 $d_{min} = (1 + u_2)^2$.



Cas C : $r_1 = 1$, $r_2 = u_1^2$, $r_3 = u_2^2$
 (ou $r_1 = u_2^2$, $r_3 = 1$)
 $\sqrt{2} - 1 \leq u_1 \leq \frac{u_2}{1 + u_2}$
 $d_{min} = (1 + u_2)^2$.



Cas D et E : $\sqrt{2} - 1 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$; $u_1 \geq \frac{u_2}{1+u_2}$.

$$d_1 = u_2^2 + 2u_1(u_2 + 1) + 1$$

$$d_2 = u_1^2 + 2u_2(u_1 + 1) + 1$$

$$d_3 = u_1^2 + 2(u_1 + u_2) + u_2^2$$

$$d_3 - d_2 = (u_1 - 1)(-2u_1 + u_2 + 1) = (u_1 - 1)(u_2 - u_1 + 1 - u_1) \leq 0$$

$$d_2 - d_1 = (u_2 - u_1)(2 - (u_1 + u_2)) \geq 0$$

$$d_3 - d_1 = (u_1 - 1)(u_1 + 1 - 2u_2) \text{ a le signe de } 2u_2 - u_1 - 1$$

Cas D : $2u_2 - u_1 - 1 \geq 0$,

on a $d_3 \geq d_1$ et $d_2 \geq d_1$

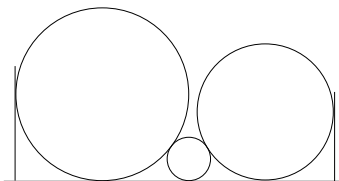
d'où

$$d_{\min} = d_1$$

$$= u_2^2 + 2u_1(u_2 + 1) + 1$$

$$r_1 = 1, r_2 = u_1^2, r_3 = u_2^2$$

$$(\text{ou } r_1 = u_2^2, r_2 = u_1^2, r_3 = u_1).$$



Cas E : $2u_2 - u_1 - 1 \leq 0$,

on a $d_3 \leq d_1$ et $d_3 \leq d_2$

d'où

$$d_{\min} = d_3$$

$$= u_1^2 + 2(u_1 + u_2) + u_2^2$$

$$r_1 = u_1^2, r_2 = 1, r_3 = u_2^2$$

$$(\text{ou } r_1 = u_2^2, r_2 = 1, r_3 = u_1^2).$$

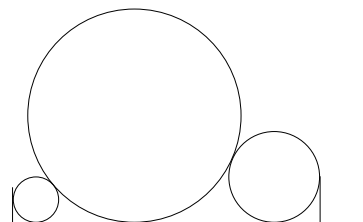
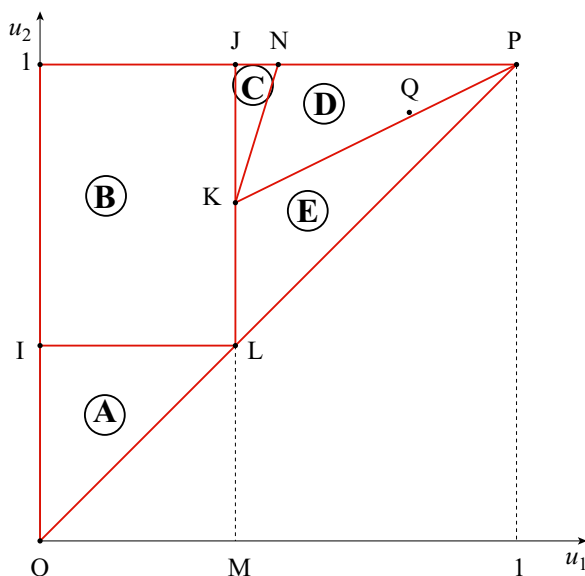


Figure récapitulative



sur cette figure récapitulative nous avons précisé le régionnement du plan

(u_1, u_2) ou plus précisément du triangle $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$ correspondant aux différentes expressions de la distance d minimum. Les coordonnées des divers points de la figure sont :

$$I(0, \sqrt{2} - 1); J(\sqrt{2} - 1, 1); K\left(\sqrt{2} - 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); L(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1); \\ M(\sqrt{2} - 1, 0); N\left(\frac{1}{2}, 1\right); P(1, 1).$$

$\widehat{NK}$ de l'hyperbole équilatère d'équation $u_2 = \frac{u_1}{1 - u_1}$.

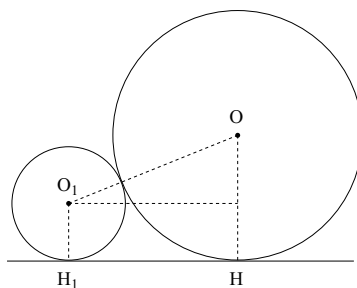
La cas particulier 3, 4, 5 correspond au point Q de coordonnées $\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{4}{5}}\right)$. Un calcul précis confirme que Q est au-dessus du segment [KP].

Faisons une figure dans un plan vertical passant par le centre O du ballon de rayon R et par celui, O₁ d'une des balles de tennis de rayon r.

On a $OO_1 = R + r$

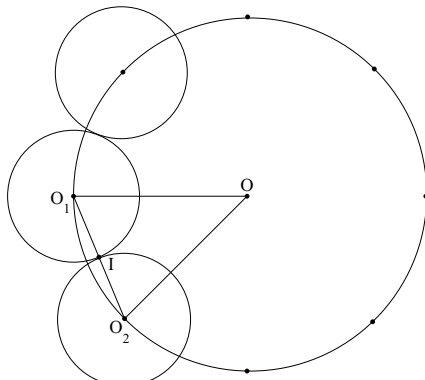
et $OO_1^2 = HH_1^2 + (R - r)^2$

d'où $HH_1^2 = 4Rr$.



3.

Construisons alors la projection horizontale du ballon et des 8 balles : les centres O₁ à O₈ des 8 balles sont sur un cercle de rayon HH₁ et sommets d'un octogone régulier de côté 2r.



Dans le triangle OO₁O₂, on a $O_1O_2^2 = 2O_1O^2 - 2O_1O^2 \cos 45^\circ$

$$\text{ou } 4r^2 = 2O_1O^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2HH_1^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$\text{D'où } 4r^2 = 8Rr \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ou $r = R(2 - \sqrt{2}) = 0,5858R$.

Si $R = 4$, $r \approx 2,34$ cm.

Exercice n° 3 (Séries ES - L)

Enoncé

Le jeu

Un supermarché propose un jeu pour fidéliser sa clientèle.

On donne à chaque client une carte de 10 coupons et un capital fictif de 1€.

À chaque passage en caisse, le client donne un coupon par tranche de 10 ? d'achat et voit son capital multiplié par le nombre de coupons donnés.

Ainsi, si son achat est de 30€, il donne 3 coupons et sa cagnotte est alors multipliée par 3. Il pourra toucher son capital à la fin de sa carte.

1. Un client fait un premier achat de 100€, quel est le montant de son capital ?
2. Un autre client, chaque jour pendant 10 jours, fait un achat pour un montant de 10 €, quel est au final le montant de son capital ?
3. Un troisième client fait un achat de 50€ suivi le lendemain d'un autre achat de 50€. Quel est le montant de son capital ?
4. Un client a fait plusieurs achats successifs pour un total de 100€ et il a un capital de 12€. Quels sont les montants de ses achats successifs ?
5. Comment peut-on répartir ses achats pour avoir le capital le plus élevé possible ?
6. Voyant le succès du jeu, le supermarché décide d'éditer des cartes de 20 coupons, mais il fait rapidement faillite ! Quel est le capital maximum pouvant être gagné par un client avec une carte de 20 coupons et un capital de départ de 1€ ?

Eléments de solution (P.L.H.)

1. Le premier client reçoit 10 coupons et un capital de 1€.
Après son premier achat de 100€, il touche 10 coupons, les donne à la caisse et son capital est multiplié par 10 et devient donc 10€.
2. Le capital du deuxième client est multiplié par 1 à chaque passage à la caisse, donc au final il est encore de 1€.
3. Le capital du troisième client prend les trois valeurs successives : 1, 5, 25.
4. $12 = 4 \times 3 = 6 \times 2 = 2 \times 2 \times 3$.
Seuls modifient le capital les achats d'un montant au moins égal à 20€. Le quatrième client a donc pu effectuer un achat compris entre 20 et 29€ et un compris entre 60 et 69€ et réparti le reste des 100€ entre des achats d'un montant inférieur à 20€ ou un achat compris entre 30 et 39€ et un autre entre 40 et 49€ ou 3 achats donnant respectivement 2, 2 et 3 coupons.

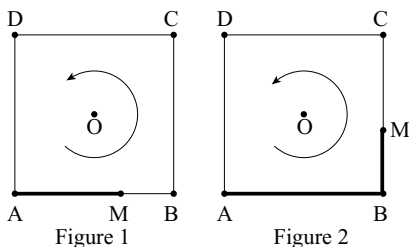
5. Si on dispose de 100€, on peut les répartir en 5 achats de 20€ et porter ainsi son capital à $2^5 = 32$ €, en trois achats de 30€ ne rapportant que $3^3 = 27$ €, en 2 achats de 50€ : $5^2 = 25$ €.
6. Si un client dispose de 20 coupons et de 200€, il peut les répartir en 10 achats de 20€ et son capital sera $2^{10} = 1\,024$ €.

Exercice n° 4 (Séries ES - L)

Enoncé

Distance sur un carré

ABCD est un carré de côté 4 cm et de centre O. Soit M un point qui décrit ce carré. On appelle « abscisse de M » la distance x (en cm) qu'a parcouru le point M à partir du point A lorsqu'il s'est déplacé sur le carré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

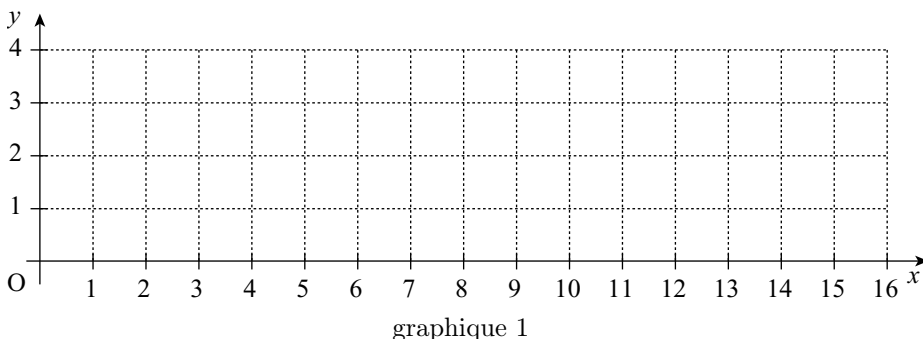


Ainsi, sur la figure 1, on a $x = 3$ et sur la figure 2, on a $x = 4 + 2 = 6$.

Question 1 : On note $f(x)$ la distance entre le point O et le point M.

Exemple : lorsque le point M est sur A alors $x = 0$ et $f(0) = OA$ soit, puisque $OA = 2\sqrt{2}$, $f(0) = 2\sqrt{2}$.

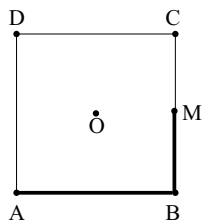
Représenter f sur le graphique 1 (A rendre avec la copie).



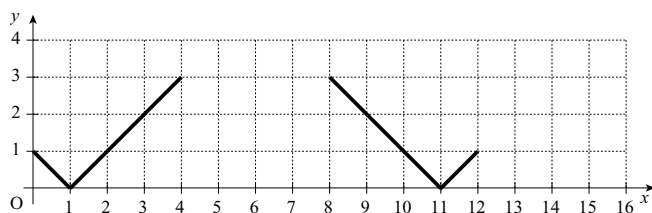
P et Q sont deux points distincts situés à l'intérieur du carré ABCD ou sur la frontière de celui-ci. On note $f(x)$ l'aire du triangle MPQ.

Question 2 : Dans cette question P est le milieu de [OD] et Q le milieu de

[OA]. Tracer le triangle MPQ sur le graphique 2 de l'annexe puis compléter la représentation graphique de f sur le graphique 3.

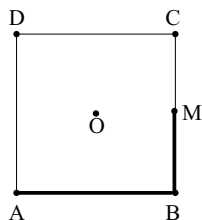


graphique 2

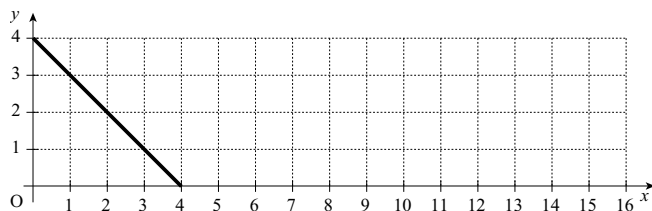


graphique 3

Question 3 : Dans cette question, P est le milieu de [OD] et Q le milieu de [OB]. Tracer le triangle MPQ sur le graphique 4 de l'annexe puis compléter la représentation graphique de f sur le graphique 5.

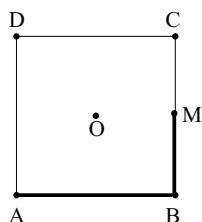


graphique 4

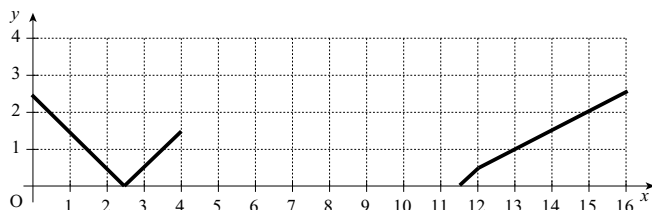


graphique 5

Question 4 : Dans cette question, P est le milieu de [OD], I est le milieu de [AB] et Q le milieu de [OI]. Tracer le triangle MPQ sur le graphique 6 de l'annexe puis compléter la représentation graphique de f sur le graphique 7.

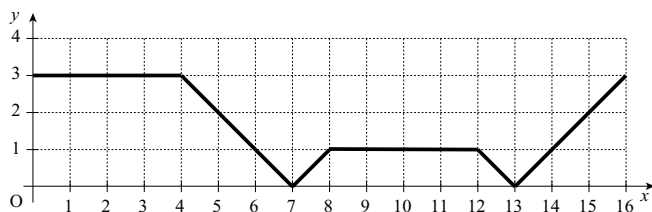


graphique 6



graphique 7

Question 5 : Dans cette question, P et Q sont des points à l'intérieur du carré. La représentation graphique de f est donnée ci-dessous. Déterminer avec précision les positions possibles de P et Q.



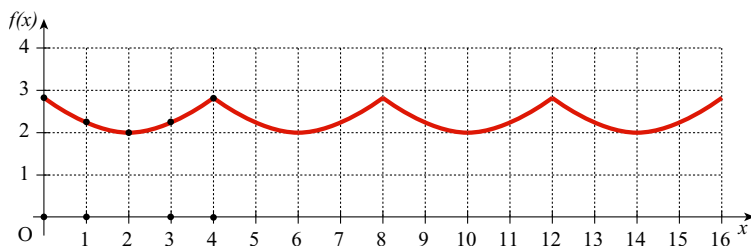
Éléments de solution (P.L.H.)

Question 1

Dans cette question, $f(x) = OM$.

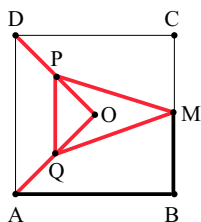
- si $0 \leq x \leq 4$ $f(x)^2 = 2^2 + (2-x)^2 = 8 - 4x + x^2$
d'où $f(x) = \sqrt{8 - 4x + x^2}$
- si $4 \leq x \leq 8$ $f(x)^2 = (x-4)^2 + (6-x)^2$; $f(x) = f(x-4)$
- si $8 \leq x \leq 12$ $f(x)^2 = (x-8)^2 + (10-x)^2$; $f(x) = f(x-8)$
- si $12 \leq x \leq 16$ $f(x)^2 = (x-12)^2 + (14-x)^2$

Sur l'intervalle $[0; 4]$, la courbe représentative de f est un arc Γ_1 (d'hyperbole équilatère) symétrique par rapport à la droite $x = 2$ et passant par les points $(0, 2\sqrt{2})$ $(1, \sqrt{5})$ $(2, 2)$ $(3, \sqrt{5})$ et $(4, 2\sqrt{2})$, avec $2\sqrt{2} = 2,828$ et $\sqrt{5} = 2,236$. Sur chaque intervalle $[4i, 4(i+1)]$, l'arc de courbe représentatif est le translaté de Γ_1 par une translation d'amplitude $4i$ ($2 \leq i \leq 4$; i entier compris entre 1 et 3).

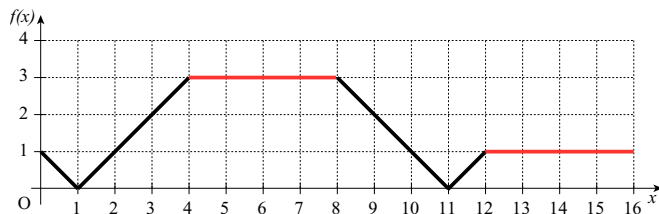


Question 2

Dans cette question, (PQ) est parallèle à (AD) et l'aire du triangle MPQ reste constante quand M parcourt [BC] ($f = 3$) ou [AD] ($f = 1$).

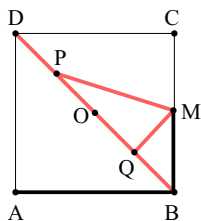


Ceci permet de compléter la représentation graphique de f



Question 3

Dans cette question [PQ] est porté par la droite (DB) et a pour longueur $\frac{DB}{2} = 2\sqrt{2}$.



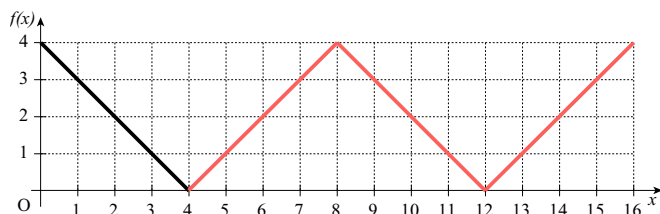
L'aire du triangle MPQ est donc égale au produit de $\sqrt{2}$ par la distance de M à la droite (DB). Celle-ci est égale à

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{2}}{2}(4-x) \quad \text{sur } [0, 4] \\ & \frac{\sqrt{2}}{2}(x-4) \quad \text{sur } [4, 8] \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(12-x) \text{ sur } [8, 12]$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x-12) \text{ sur } [12, 16]$$

D'où la représentation graphique :



Question 4

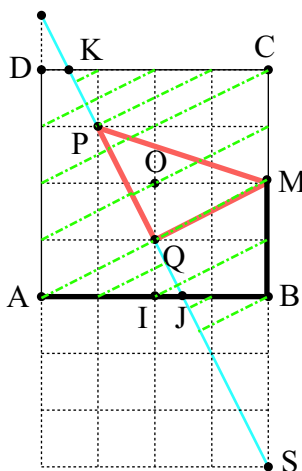
La droite (PQ) coupe [AB] au point J d'abscisse $x = 2,5$ et [CD] au point K d'abscisse $x = 11,5$. On a donc $f(2,5) = f(11,5) = 0$.

Si M est au milieu de [BC], [MQ] est orthogonal à [PQ] et l'aire de MPQ est égale à

$$\frac{1}{2}PQ \cdot MQ = \frac{1}{2}PQ^2 = \frac{DJ^2}{8} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Par symétrie autour de (PQ), $f(0) = 2,5$.

Pour chaque point M d'abscisse x entière, on calcule sa distance à la droite (PQ) en utilisant le théorème de Thalès successivement pour les angles de sommet J, S, K et T et on en déduit l'aire du triangle MPQ en fonction de x .

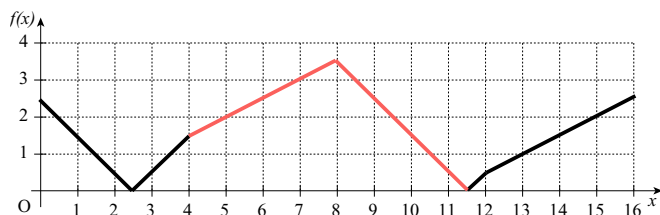


x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	2,5	1,5	0,5	0,5	1,5	2	2,5	3	3,5	2,5

x	10	11	12	13	14	15	16
$f(x)$	1,5	0,5	0,5	1	1,5	2	2,5

On peut aussi construire f et sa représentation graphique comme (par Thalès) la fonction affine par morceaux et continue qui satisfait $f(2,5) = f(11,5) = 0$ et $f(6) = f(0) = 2,5$

$$f(x) = \begin{cases} |2,5 - x| & \text{pour } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x-1}{2} & \text{pour } 4 \leq x \leq 8 \\ |11,5 - x| & \text{pour } 8 \leq x \leq 12 \\ \frac{x-11}{2} & \text{pour } 12 \leq x \leq 16 \end{cases}$$

**Question 5**

De $f(7) = 0$ et $f(13) = 0$ on déduit que P et Q sont sur $[IJ]$ où J est d'abscisse 7 et I d'abscisse 11.

De $f(x) = 1$ sur $[8, 12]$, ou de $f(x) = 3$ sur $[0, 4]$, on déduit $PQ = 2$: $[PQ]$ est un sous-segment de longueur 2 de $[IJ]$.

