

NANCY

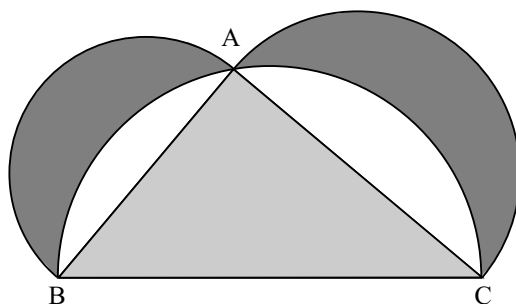
Exercice n° 1

Enoncé

Les tapis

1. Les lunules d'Hypocrate de Chios

Soit ABC un triangle rectangle en A . On construit le demi-cercle de diamètre $[BC]$ passant par A et les demi-cercles extérieurs au triangle ABC de diamètres $[AB]$ et $[AC]$. Les demi-cercles ainsi tracés délimitent deux « croissants de lune » ou « lunules ».



Montrer que la somme des aires des deux lunules est égale à l'aire du triangle ABC .

2. Le principe des tapis On considère une pièce d'aire A et deux tapis de formes quelconques dont la somme des aires est égale à A .

On dispose les deux tapis à l'intérieur de la pièce. Certaines zones ne sont pas recouvertes, d'autres sont couvertes par un seul des deux tapis et d'autres enfin le sont par les deux tapis superposés.

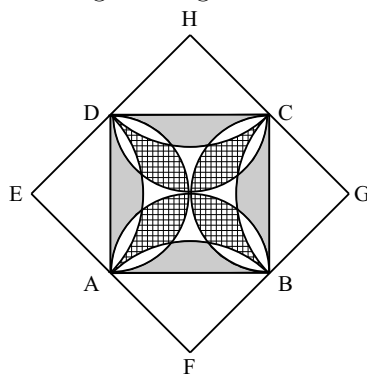
Justifier que l'aire de la partie de la pièce non recouverte est égale à l'aire de la partie couverte par les deux tapis en même temps.

3. Pour cette question, on peut utiliser :

- soit les résultats des questions 1 et 2 ;
- soit toute autre méthode.

La figure suivante comporte deux carrés ABCD et FGHI, quatre demi-cercles dont les diamètres sont les côtés du carré ABCD et quatre quarts de cercle de centres F, G, H et I.

Montrer que l'aire colorée en gris est égale à l'aire hachurée.



Eléments de solution

1. Aire des lunules

L'aire des lunules peut se calculer par la différence entre l'aire totale de la figure, c'est-à-dire la somme des aires du triangle ABC et des deux demi-disques de diamètre [AC] et [AB], et l'aire du demi-disque de diamètre [BC].

On note respectivement a , b et c les rayons des disques de diamètre [BC], [AC] et [AB].

L'aire des lunules vaut donc $\left(\frac{1}{2}AC \times AB + \frac{1}{2}\pi \times b^2 + \frac{1}{2}\pi \times c^2\right) - \frac{1}{2}\pi \times a^2$, et comme le triangle ABC est rectangle en A, on montre, d'après le théorème de Pythagore que $a^2 = b^2 + c^2$.

Et donc l'aire des lunules vaut

$$\left(\frac{1}{2}AC \times AB + \frac{1}{2}\pi \times b^2 + \frac{1}{2}\pi \times c^2\right) - \frac{1}{2}\pi \times (b^2 + c^2) = \frac{1}{2}AC \times AB.$$

Finalement la somme des aires des deux lunules est bien égale à l'aire du triangle ABC.

2. Le principe des tapis

Soit A l'aire de la pièce et A_1 et A_2 les aires des deux tapis, A_0 l'aire de la partie non recouverte, A' l'aire de la pièce recouverte par un seul des deux tapis et A'' l'aire de la partie de la pièce recouverte par les deux tapis en même temps.

Alors on a $A = A_1 + A_2$ et $A = A_0 + A' + A''$ avec $A_1 + A_2 = A' + 2A''$ car l'aire A'' est recouverte deux fois, d'où $A_0 = A''$.

3.

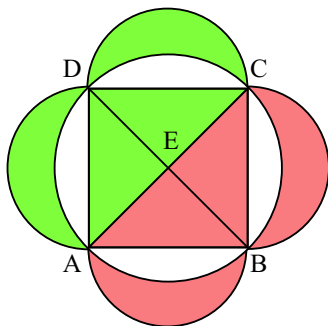


figure 1

Dans la figure 1 (ci-contre), le triangle rectangle et isocèle ABC a la même aire que les deux lunules rouges et le triangle ADC a la même aire que les deux lunules vertes et donc l'aire des quatre lunules est égale à celle du carré $ABCD$.

On transforme le triangle AEB et la lunule construite sur le côté $[AB]$ du carré par la symétrie d'axe (AB) (voir figure 2 ci-contre) et on fait de même pour les autres côtés du carré $ABCD$. On obtient donc la figure de l'énoncé (figure 3 ci-dessous).

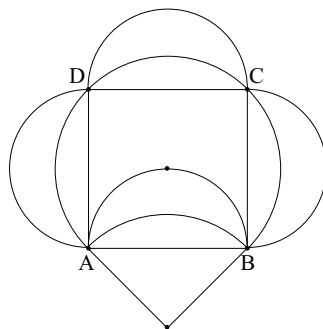


figure 2

On considère alors que le carré $ABCD$ est une pièce où l'on dispose les deux tapis suivants dont la somme des aires vaut bien l'aire de la pièce :

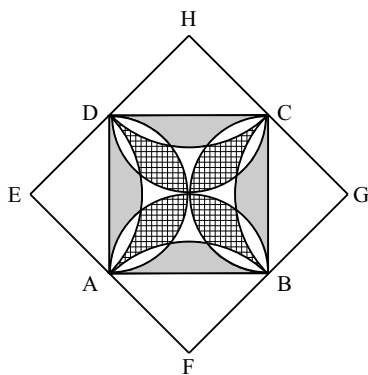
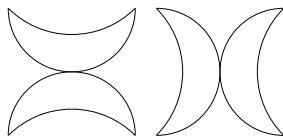


figure 3

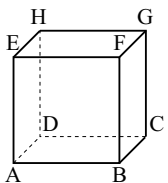
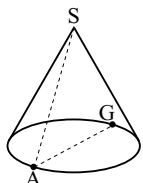
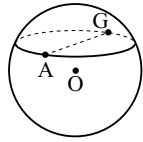
La zone colorée en gris est la partie de la pièce recouverte par aucun des deux tapis tandis que la zone hachurée est celle qui est recouverte par les deux tapis simultanément. D'après le principe des tapis, les aires de ces deux zones sont donc égales.

Exercice n° 2 (Séries S et STI)

Enoncé

La course des escargots

Trois escargots Li, Ma et Son adorent la compétition, mais à chaque fois qu'ils font une course, ils se retrouvent ex-æquo car ils se déplacent à la même vitesse. Ils ont alors l'idée suivante : chacun va effectuer un parcours différent, Li sur un cube, Ma sur un cône, et Son sur une sphère (voir figures), chacun devant relier A à G en se déplaçant sur la surface extérieure du solide. Les solides étant posés sur le sol, Li ne peut pas passer par la face ABCD et Ma ne peut pas passer par la base.

Parcours de Li	Parcours de Ma	Parcours de Son
		
L'arête du cube mesure 30cm	Le diamètre du cercle de base mesure 50 cm. A et G sont diamétralement opposés sur le cercle de base. Le segment [AS] mesure 60 cm.	Le rayon de la sphère de centre O mesure 30 cm. A et G sont diamétralement opposés sur le même parallèle. L'angle $\widehat{AOG}$ mesure 120° .

1. Parcours de Ma

Dessiner un patron du cône à l'échelle 1/10. Représenter sur ce patron la trace du trajet le plus court menant de A à G sur le cône.

Calculer à 1 mm près la longueur de ce trajet.

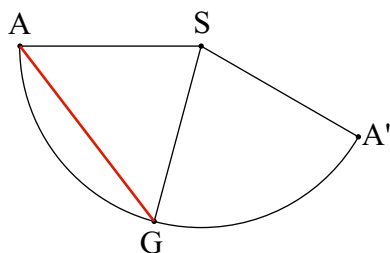
2. Parcours de Li.

Calculer à 1 mm près la longueur du trajet le plus court menant de A à G sur le cube.

3. Parcours de Son.

Son peut-il espérer gagner la course ?

Eléments de solution



1. $SA = 60$; $\alpha = \widehat{ASA'} = 150^\circ$

En effet, le périmètre du cercle de base du cône est $2\pi \times r = 50\pi$ et la longueur de l'arc $\widehat{AC}$ est $60 \times \alpha$ (α en radians).
D'où $60\alpha = 50\pi$

et $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ radians = 150°

Il est alors facile de calculer la distance AG , par exemple avec Al-Kashi,

$$AG^2 = SA^2 + SG^2 - 2 \times SA \times SG \times \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) \text{ donc } AG = 73,1 \text{ cm à } 1 \text{ mm près.}$$

2. Un patron du cube permet d'observer que le trajet le plus court est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 60 et 30, d'où $AG^2 = (AB+BC)^2 + CG^2 = 60^2 + 30^2$, donc $AG \approx 67,1$ cm à 1 mm près.

3. Si on calcule la longueur de l'arc $\widehat{AC}$ sur le parallèle tracé sur la figure, on trouve $\ell = \pi \times 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 81,6$. Mais calculons la longueur du trajet en suivant le grand cercle (de centre O) passant par ces deux points; c'est un arc de rayon 30 et d'angle $120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ rad., donc la longueur de ce trajet est $AG = \frac{2\pi}{3} \times 30 \approx 62,8$ cm à 1 mm près. Son peut donc gagner la course s'il choisit ce trajet.

Exercice n° 3 (Séries autres que S et STI)

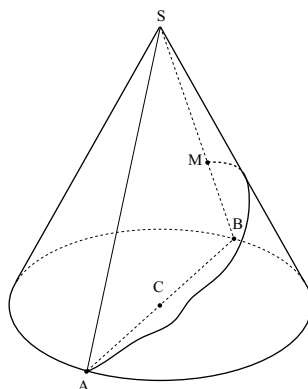
Enoncé

La course des fourmis

Deux fourmis Four et Mi disputent une course. Chacune des deux fourmis doit partir d'un point A et rejoindre un point M par le chemin le plus court sur la surface d'un solide posé sur le sol.

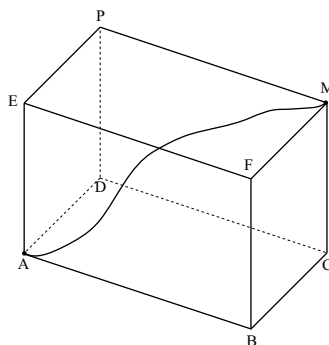
Four se déplace sur un cône de révolution de sommet S tel que :

- le rayon de la base mesure 4 cm ;
- le segment [SA] mesure 12 cm ; - B et A sont diamétralement opposés sur le cercle de base ;
- M est le milieu du segment [SB].



Mi se déplace sur un parallélépipède rectangle ABCDEFMP tel que :

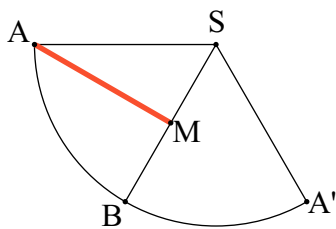
- le segment [AB] mesure 7 cm ;
- le segment [AD] mesure 4 cm ;
- le segment [AE] mesure 3 cm.



La course est-elle équitable ? Autrement dit les deux fourmis ont-elles la même distance à parcourir ?

(On aura avantage à raisonner à partir de patrons des deux solides).

Eléments de solution



$$SA = 12 ; \alpha = \widehat{ASA'} = 120^\circ$$

En effet, le périmètre du cercle de base du cône est $2\pi \times r = 8\pi$ et la longueur de l'arc $\widehat{AA'}$ est 12α (α en radians=.

$$\text{D'où } 12\alpha = 8\pi \text{ et } \alpha = \frac{2\pi}{3} \text{ radians} = 120^\circ.$$

Ainsi le triangle ASB est équilatéral et [AM] est sa hauteur issue de A d'où $AM = AS \times \sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$.

Four doit donc parcourir la distance $AM \approx 10,4$ cm à 1 mm près.

Pour Mi, un patron du cube permet d'observer que le trajet le plus court est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 7 et $4 + 3 = 7$, d'où $AM^2 = AB^2 + (BF + FM)^2 = 7^2 + 7^2$, donc Mi doit parcourir la distance $AM \approx 9,9$ cm à 1 mm près.

Par conséquent, **la course n'est pas équitable.**