

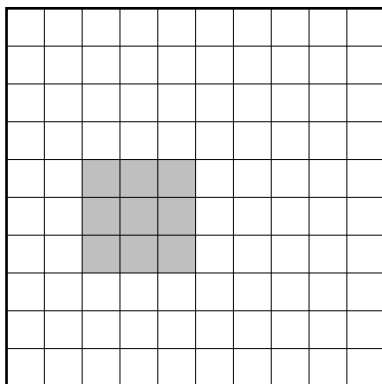
MONTPELLIER

Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

Le Cardiff de Khâré

Il y a fort longtemps, dans une province lointaine nommée Khâré, se trouvait le palais du « Grand Cardiff ». Dans ce palais on pouvait admirer une salle d'apparat de forme carrée, pavée avec a^2 carreaux carrés de taille identique. Parmi ceux-ci il y a b^2 carreaux carrés colorés dessinant un motif carré, le reste du pavage étant formé de carreaux carrés blancs.



*Exemple de situation avec motif de 3^2 carreaux
dans une salle de 10^2 carreaux.*

Le grand mathématicien Factos se présente au palais pour servir le Cardiff qui interpelle Factos ainsi :

« Dans ma salle d'apparat, il y a deux mille neuf carreaux blancs, donne-moi le nombre total de carreaux de la salle alors tu seras à mon service.

- Mais, vénérable Cardiff, il y a trois solutions !
- C'est pour ce que tu viens de répondre que tu es engagé », répondit le Cardiff.

1. Vérifier que 1005^2 carreaux est une solution possible.
2. Déterminer les deux autres solutions de Factos au problème du Cardiff de Khâré.

Eléments de solution

1. $1005^2 - 2009$ représente le nombre de carreaux colorés ; il faut et il suffit que ce nombre soit un carré parfait pour représenter le nombre de carreaux du carré coloré : 1004^2 .

2. En notant a le nombre total de carreaux et b le nombre de carreaux colorés, on a l'équation $a^2 - b^2 = 2009$ soit $(a - b)(a + b) = 2009$.

Or : $2009 = 41 \times 7^2$.

Dans cette équation, les deux facteurs sont des entiers naturels et $a > b$.

Donc $(a + b)$ divise 41×7^2 , donc $(a + b) = 41 \times 7^2$ ou $(a + b) = 41 \times 7$ ou $(a + b) = 7^2$.

$$\text{On obtient } \begin{cases} a + b = 41 \times 7 \times 7 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a + b = 41 \times 7 \\ a - b = 7 \end{cases}$$

$$\text{ou } \begin{cases} a + b = 7 \times 7 \\ a - b = 41 \end{cases}$$

En résolvant, on a : $a = 1005$ ou $a = 147$ ou $a = 45$.

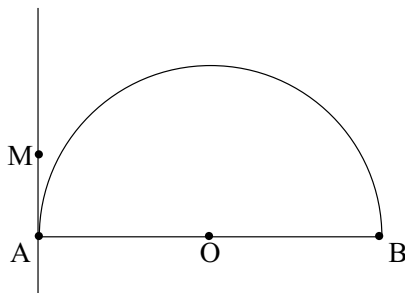
On vérifie que ces trois nombres sont effectivement solution du problème.

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

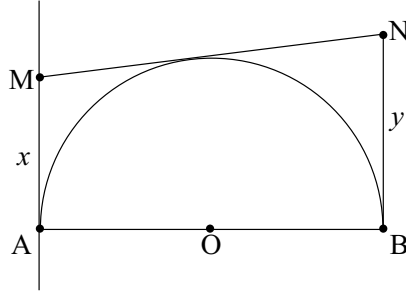
Cercle et segment

- Dans la figure représentée ci-dessous, le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle de centre O et les droites (AM) et (AB) sont perpendiculaires. Reproduire la figure ci-dessous et construire à la règle et au compas la droite passant par M , différente de (AM) et tangente au demi-cercle de diamètre $[AB]$.



2. On reprend la même figure avec, de plus, les droites (BN) et (MN) . Les droites (BN) et (AB) sont perpendiculaires et la droite (MN) est tangente au cercle de diamètre $[AB]$.

On pose : $AM = x$ et $NB = y$.



Montrer que :

- (a) $x + y = MN$
 - (b) $x \cdot y = OA^2$
3. L'unité de mesure est définie par la longueur du segment $[OI]$. M est un point de la demi-droite $[OI]$ et le segment $[OM]$ mesure x . Construire à la règle et au compas un rectangle d'aire 1 et dont un côté mesure x .



Eléments de solution

2. a) En appelant T le point où (MN) est tangente au cercle : on a : $MT = MA = x$ et $NT = NB = y$ (configuration classique ; on peut aussi détailler en montrant que les triangles MAO et MTO sont isométriques puisque rectangles avec des côtés homologues égaux). Donc $x + y = MT + NT = MN$.

- b) Le triangle MON est rectangle en O .

(par des considérations angulaires, par exemple : $\widehat{AOT} = 2\widehat{MOT}$ et $\widehat{TOB} = 2\widehat{TON}$ donc $\widehat{AOB} = 2\widehat{MON} = \pi$).

Dans ce triangle MON rectangle dont OT est une hauteur : $OT^2 = MT \times NT$.

En montrant

- d'abord que MOT et ONT sont semblables : $\widehat{MOT} + \widehat{OMT} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{OMT} + \widehat{MNO} = \frac{\pi}{2}$ donc $\widehat{MOT} = \widehat{MNO}$.

- puis en appliquant le proportionnalité des côtés homologues : $\frac{MT}{OT} = \frac{OT}{NT}$.

On a donc $OT^2 = OA^2 = MT \times NT = xy$.

3. Il y a de multiples constructions possibles. En utilisant ce qui précède, on construit par des reports de longueurs, deux segments de longueur x donnée et y telles que $xy = 1$.

Par exemple :

- On trace la perpendiculaire en O à (OI) et on trace le cercle de centre Ω , de rayon 1 et tangent à (OI) en O. Ce cercle recoupe (O Ω) en O'.
- On construit (Δ) la perpendiculaire à (O Ω) tangente au cercle en O'.
- A partir de M on trace l'autre tangente au cercle. Elle coupe (Δ) en N.
- On a $NO' = y$ et $xy = 1$ d'après 2. Reste à reporter ces longueurs pour définir les côtés d'un rectangle.

Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Rugby

Au rugby, après décision de l'arbitre, les équipes marquent des points lors de trois phases de jeu :

- En réussissant un coup de pied de pénalité pour 3 points,
- En réussissant un drop pour 3 points,
- En marquant un essai qui sera soit « transformé » soit « non transformé » : s'il est « transformé » il rapporte 7 points, s'il est « non transformé », il rapporte 5 points.

1. Éric affirme que son équipe a marqué 27 points grâce à deux essais. Est-ce possible ? Justifier.
2. Bénédicte rapporte que son équipe a marqué 36 points grâce à quatre essais et plusieurs pénalités. Combien de ces essais ont été « transformés » ?
3. Une équipe a marqué 30 points, trouver toutes les manières dont ces 30 points ont pu être obtenus.
4. Quels sont les scores impossibles au rugby ?

Eléments de solution

1. Oui : 1 essai transformé, 1 essai non transformé et 5 coups de pied de pénalité (ou drops), soit $7 + 5 + 5 \times 3 = 27$.
2. 4 essais : 20 points ; reste à obtenir 36-20 points soit 16 points.
Il s'agit de trouver k , le nombre de transformations : $0 \leq k \leq 4$ puisqu'il y a eu 4 essais.

On doit avoir $16 - 2k$ multiple de 3 puisque les pénalités valent 3 points.

On trouve par essais successifs : $k = 2$.

Il y a donc eu 2 essais transformés et 2 essais non transformés ainsi que 4 pénalités.

3. On peut essayer tous les cas : soit k le nombre d'essais et k' le nombre de transformations réussies. D'abord $0 \leq k' \leq k$ puis $0 \leq k \leq 6$ puisqu'il y a eu 30 points marqués.

Le nombre de points marqués par des essais transformés ou non est $5k + 2k'$ et ce résultat sera complété par des points dus aux x pénalités (ou drops) donc par un multiple de 3 inférieur à 30.

Dans le tableau suivant, en colonne, le nombre d'essais et en ligne le nombre de transformations réussies.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	5	10	15	20	25	30
1		7	12	17	22	27	X
2			14	19	24	29	X
3				21	26	X	
4					28	X	X

Il y a 6 possibilités pour un résultat de 30 points.

15 : avec par exemple 3 essais (non transformés) et 5 pénalités ;

30 : avec 6 essais ;

12 : avec 2 essais dont 1 transformé et 6 pénalités ;

27 : avec 5 essais dont 1 transformé et 1 pénalité ;

24 : avec 4 essais dont 2 transformés et 2 pénalités ;

21 : avec 3 essais (tous transformés!!) et 3 pénalités.

4. Les résultats 6, 7 et 8 peuvent être atteints, donc les scores $6 + 3k$; $7 + 3k$ et $8 + 3k$ peuvent être atteints. Or, tout entier $n > 8$ peut s'écrire par division euclidienne :

$$n = 3k + 0 \quad \text{avec } k \geq 2 \quad \text{soit } n = 3(k - 2) + 6 \quad (6 \text{ points et } k - 2 \text{ pénalités})$$

$$n = 3k + 1 \quad \text{avec } k \geq 2 \quad \text{soit } n = 3(k - 2) + 7 \quad (7 \text{ points et } k - 2 \text{ pénalités})$$

$$n = 3k + 2 \quad \text{avec } k \geq 2 \quad \text{soit } n = 3(k - 2) + 8 \quad (8 \text{ points et } k - 2 \text{ pénalités})$$

Pour $n \leq 8$, les résultats 0, 3, 5 et 6 peuvent être atteints.

Tous les résultats sont atteints sauf 1, 2 et 4.

Exercice n° 4 (Séries autres que S)

Enoncé

La pièce et l'oie

Il s'agit d'un jeu de l'oie où l'on joue avec une pièce de monnaie. On part de la case départ (case 0), on lance la pièce ; si le pile sort on avance d'une case ; si le face sort on avance de deux cases. On appelle trajet une séquence de la

forme $(1; 1; 2; 1)$ qui résulte dans ce cas du tirage PILE/PILE/FACE/PILE (et qui fait tomber sur la case 5).

1. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 5 ?
2. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 5
 - (a) qui passent par la case 4 ?
 - (b) qui ne passent pas par la case 4 ?
3. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 12 ?
4. Combien y-a-t-il de trajets possibles pour tomber sur la case 12 en passant par la case 8.

Eléments de solution

1. 8 trajets : $(1; 1; 1; 1; 1)$
 $(1; 1; 1; 2)$ $(1; 1; 2; 1) \dots$ 4 trajets avec 1 tirage F ;
 $(1; 2; 2) \dots$ 3 trajets avec 2 tirages F.
2. a) On compte les trajets qui arrivent en 4 : 5 possibilités
 b) Il y en a $8 - 5$.
3. Mise en place d'une suite de Fibonacci ou autre : 233 trajets possibles.
4. Nombre de trajets pour arriver sur la case $8 \times$ nombre de trajets pour aller de 8 en 12
 ou encore : nombre de trajets pour arriver sur la case $8 \times$ nombre de trajets pour aller sur 4, soit $34 \times 5 = 170$.