

LYON

Exercice n° 1

Enoncé (Toutes séries)

Itération

On considère une séquence composée des lettres X, Y, Z que l'on suppose, pour simplifier, rangées dans l'ordre alphabétique ; par exemple la séquence $XYXZY$ s'écrira $XXYYZ$.

À chaque étape, on choisit d'ajouter à la séquence une des trois lettres X, Y ou Z et d'enlever les deux autres selon le schéma suivant :

Si on ajoute un X, on enlève un Y et un Z (si bien sûr Y et Z sont présents, sinon on s'arrête) ;

Si on ajoute un Y, on enlève un X et un Z (si X et Z sont présents, sinon on s'arrête) ;

Si on ajoute un Z, on enlève un X et un Y (si X et Y sont présents, sinon on s'arrête) ;

Par exemple, partant de la séquence $XXYYZ$.

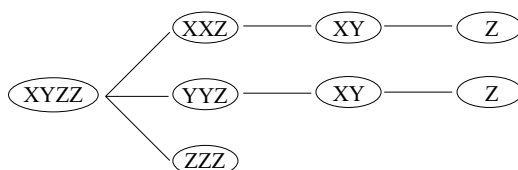
- si on ajoute X, on enlève un Y et un Z, on obtient alors XXX Y ;
- si on ajoute Y, on obtient $XXYY$ Y ;
- si on ajoute Z, on obtient $XYZZ$.

Et, partant de la séquence XY Y, on ne peut ajouter que Z et on obtient alors : XYZ . On réitère le processus autant que possible.

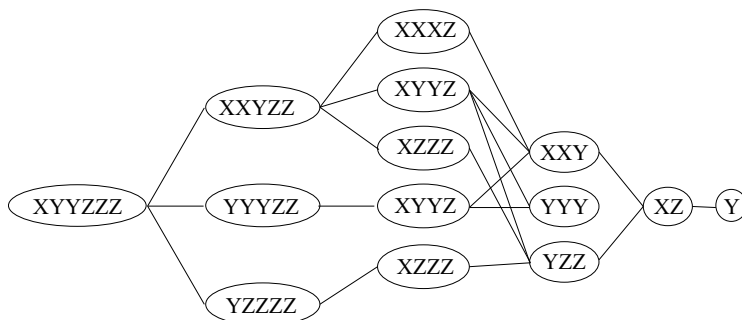
1. Quelles sont toutes les issues possibles en partant de la séquence XYZ ?
2. Quelles sont toutes les issues possibles en partant de la séquence $XYZZ$?
3. On part d'une séquence composée de 6 lettres. Lorsqu'il est possible d'arriver à une séquence d'une seule lettre, quel est le nombre d'étapes nécessaires ?
4. On part de la séquence composée de dix X, onze Y et douze Z. Quelle(s) lettre(s) obtient-on dans les issues formées d'une seule lettre ?
5. Trouver une séquence de dix lettres aboutissant à la seule lettre X.

Eléments de solution

1 et 2. En ce qui concerne les deux premières questions, on peut représenter par des arbres l'évolution de la séquence.



1. Les issues possibles sont Z et ZZZ.



2. Les issues possibles sont Y ou YYY.

3. A chaque étape, le nombre de lettres diminue d'une unité ; il y a donc 5 étapes pour arriver à une séquence d'une lettre lorsqu'on part d'une séquence de 6 lettres.
4. Puisqu'il y a 33 lettres dans la séquence, il faut 32 étapes pour arriver à une séquence d'une lettre. A chaque étape le nombre de lettres X (ou Y ou Z) augmente ou diminue d'une unité, donc change de parité. Au départ, il y a 10 lettres X, 11 lettres Y et 12 lettres Z, donc 32 étapes donnent un nombre pair de lettres X et de lettres Z et un nombre impair de lettres Y. Quelle que soit la succession d'opérations, lorsqu'il reste une lettre, c'est la lettre Y.
5. En utilisant le raisonnement précédent (avec 9 étapes), on peut choisir n'importe quelle séquence initiale comportant un nombre pair de lettres X (même 0) et un nombre impair de lettres Y et Z (avec un total de 10 lettres). On peut choisir XXYYYYYZZZ qui donne, par exemple :
 XXYYYYYZZZ $\rightarrow$ XXXYYYYZZ $\rightarrow$ XXXXYYYZ $\rightarrow$ XXXXXY
 $\rightarrow$ XXXXYZ $\rightarrow$ XXXYY $\rightarrow$ XXYZ $\rightarrow$ XYY $\rightarrow$ YZ $\rightarrow$ X

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Cercles inscrits

On considère un triangle ABC rectangle en A . On note

$$a = BC \quad b = CA \quad c = AB.$$

On appelle C le cercle inscrit dans le triangle ABC ; on rappelle que le centre du cercle inscrit d'un triangle est le point d'intersection des bissectrices. On appelle r le rayon de ce cercle.

1. Démontrer que

$$r = \frac{1}{2}(b + c - a)$$

2. PQR est un triangle rectangle en P . H est le pied de la hauteur de PQR issue de P . On appelle C_1 , C_2 et C_3 les cercles inscrits dans les triangles PQH , PQR et PRH . r_1 est le rayon de C_1 , r_2 celui de C_2 et r_3 celui de C_3 .

Démontrer que $PH = r_1 + r_2 + r_3$.

3. Dans un triangle DEF , l'orthocentre est K et le pied de la hauteur issue de E est E' . Les cercles inscrits dans les triangles $DE'K$ et $FE'K$ ont même rayon. Que peut on dire du triangle DEF ?

Eléments de solution

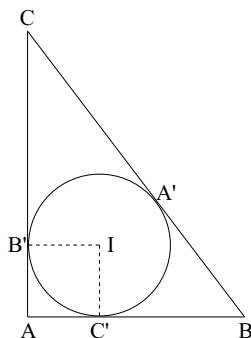
1. Le quadrilatère $AC'IB'$ a trois angles droits et deux côtés successifs IB' et IC' égaux, c'est donc un carré.

$$2r = AB' + AC'$$

$$2r = (AC - CB') + (AB - BC')$$

$$2r = b + c - (CB' + BC')$$

Or $CB' = CA'$, $BC' = BA'$ et $BA' + CA' = a$
d'où $2r = b + c - a$.



2. On applique la formule précédente aux trois triangles PQH , PQR et PRH .

$$2r_1 = PH + QH - PQ$$

$$2r_2 = PR + PQ - QR$$

$$2r_3 = RH + PH - PR$$

D'où $2(r_1 + r_2 + r_3) = 2PH + QH + RH - QR$

Or $QH + RH = QR$

donc $r_1 + r_2 + r_3 = PH$.

3. a) En notant : $x = E'D$, $y = E'F$ et $z = KE'$.

Les rayons des cercles inscrits dans les triangles $DE'K$ et KFE' sont

$$\frac{z + x - \sqrt{x^2 + z^2}}{2} \text{ et } \frac{z + y - \sqrt{y^2 + z^2}}{2}.$$

L'égalité des deux rayons implique que $x - \sqrt{x^2 + z^2} = y - \sqrt{y^2 + z^2}$

donc $x - y = \sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{y^2 + z^2}$

donc $(x - y) \left(\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} \right) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$

et comme $\sqrt{x^2 + z^2} + \sqrt{y^2 + z^2} > x + y$ car $z \neq 0$, il vient $x = y$.

E' est à la fois le milieu de $[DF]$ et le pied de la hauteur issue de E . Le triangle est donc isocèle en E .

- b) On peut aussi conclure de cette manière :

L'existence des triangles $DE'K$ et $FE'K$ impose au triangle DEF de n'être rectangle ni en D , ni en F .

Les deux centres des cercles sont du même côté de la droite (DF) , à même distance de (DF) et à même distance de (EE') : ils sont donc soit confondus soit symétriques par rapport à la droite (EE') .

Le cas où les centres sont confondus correspond au cas où E' est en dehors du segment $[DF]$. On n'aurait qu'un cercle avec trois tangentes issues de K , les droites (KE') , (KF) et (KD) , ce qui est impossible.

Finalement, E' est dans $]DF[$ et les centres des cercles sont symétriques par rapport à (EE') . Les deux cercles de même rayon sont donc symétriques par rapport à (EE') et les tangentes (KD) et (KF) à ces cercles sont aussi symétriques par rapport à (EE') puisque K est sur cette droite.

(KE') est à la fois hauteur et bissectrice du triangle KDF qui est isocèle en K . E' est donc le milieu de $[DF]$ et le triangle DEF est isocèle en E .

Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Tablettes de chocolat

Une tablette de chocolat rectangulaire, dont les bords sont lisses est constituée de a barres comportant chacune b carreaux.

Dans un premier temps, on prendra $a = 8$ et $b = 4$. On veut séparer tous les carreaux de la tablette et on s'intéresse au nombres de cassures à réaliser. Les cassures sont rectilignes et laissent des bords irréguliers.

Partie A

1. On sépare les huit barres, puis les quatre carreaux de chaque barre.
Combien de cassures a-t-on faites ?
2. On sépare quatre rangées de huit carreaux, puis les huit carreaux de chaque rangée.
Combien de cassures a-t-on faites ?
3. On suppose maintenant que la tablette possède a barres de b carreaux.
On sépare les a barres, puis les b carreaux de chaque barre. Combien de cassures a-t-on faites ?
On sépare b rangées de a carreaux, puis les a carreaux de chaque rangée.
Combien de cassures a-t-on faites ?
4. On commence par casser la tablette en deux tablettes, l'une avec c barres de b carreaux et l'autre avec $a - c$ barres de b carreaux, puis on utilise la technique de la question 3. pour chacune des deux tablettes. Combien de cassures a-t-on faites ?

Partie B

Tous les carreaux d'une tablette $a \times b$ ont été séparés. On supposera dans cette question que $3 \leq a < b$. Le tiers des carreaux n'a aucun bord lisse.

1. Trouver une relation entre a et b .
2. Pour quelles valeurs de b , a-t-on $a \geq 4$?
3. En déduire a et b .

Eléments de solution**Partie A**

1. $8 - 1 = 7$ cassures sont nécessaires pour obtenir les 8 barres. Pour chaque barre, il faut $4 - 1 = 3$ cassures pour obtenir les 3 carreaux. Le nombre total de cassures est $7 + 8 \times 3 = 31$.
2. $4 - 1 = 3$ cassures sont nécessaires pour obtenir les 4 rangées. Pour chaque rangée il faut $8 - 1 = 7$ cassures pour obtenir les 8 carreaux. Le nombre total de cassures est donc $3 + 4 \times 7 = 31$.
3. La généralisation de la question 1 s'obtient en remplaçant 8 par a et 4 par b . Le nombre de cassures est donc

$$a - 1 + a(b - 1) = ab - 1.$$

4. Comme ci-dessus, la généralisation de la question 2 se fait en remplaçant 8 par a et 4 par b . On obtient alors $b - 1 + b(a - 1)$ soit encore $ab - 1$ cassures.

5. Une cassure est nécessaire pour obtenir les deux tablettes T_1 et T_2 .

Nombre de cassures à partir de T_1 : $bc - 1$.

Nombre de cassures à partir de T_2 : $(a - c)b - 1$.

Nombre total de cassures : $1 + bc - 1 + (a - c)b - 1 = ab - 1$.

Partie B

1. Il y a $(a - 2)(b - 2)$ carreaux intérieurs qui n'ont aucun bord lisse et ab carreaux en tout, donc une relation est $3(a - 2)(b - 2) = ab$.

$$2. a = \frac{3b - 6}{b - 3}.$$

$a - 4 = \frac{6 - b}{b - 3}$ donc $a - 4$ est positif ou nul quand b est inférieur ou égal à 6.

3. $a - 3 = \frac{3}{b - 3}$ donc a n'est pas égal à 3, il est donc supérieur ou égal à 4 et, d'après ce qui précède, b est inférieur ou égal à 6.

$b = 5$ donne $a = 4, 5$ ce qui n'est pas possible donc $b = 6$ et $a = 4$.

Remarque : on peut aussi, pour la partie A, raisonner de la manière suivante (pour les enseignants et les élèves de terminale).

Soit une tablette de a barres et b rangées. On désigne par $n = ab$ le nombre de carreaux de la tablette.

Soit un naturel non nul N . Supposons la proposition $(\mathcal{P})$ « il faut $n - 1$ cassures pour sectionner complètement une tablette de n carreaux » vraie pour tous les n strictement inférieurs à N .

Sectionner une tablette de N carreaux en deux sous tablettes T_1 et T_2 de n_1 et n_2 carreaux respectivement ($n_1 < N$, $n_2 < N$, $n_1 + n_2 = N$), ce qui conduit à 1 cassure initiale puis $n_1 - 1$ pour T_1 et $n_2 - 1$ pour T_2 . Le nombre total de cassures est donc :

$$1 + (n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 1 = N - 1.$$

$(\mathcal{P})$ se vérifiant facilement pour 1, 2, 3 carreaux, le raisonnement ci-dessus montre que $(\mathcal{P})$ est vraie pour 4 carreaux donc pour 5 carreaux et ainsi de suite

...

Le nombre de cassures nécessaires pour parvenir à sectionner une tablette de a barres et b rangées, et cela de façon quelconque, est $ab - 1$.