

LIMOGES

Exercice n° 1

Enoncé

Le bon compte

Les habitants d'une lointaine planète, dits les E. T. ne disposent que de six chiffres pour exprimer les nombres : $\bar{0}$; $\bar{1}$; $\bar{2}$; $\bar{3}$; $\bar{4}$; $\bar{5}$. Pour compter au delà de $\bar{5}$, ils utilisent une numération de position notée S. I. S (Système Intergalactique Sénaire) dans laquelle la place de chaque chiffre dans le nombre lui donne une valeur spécifique comme :

$$\bar{10} \text{ pour } 1 \times 6 + 0 = 6,$$

$$\bar{502} \text{ pour } 5 \times 6^2 + 0 \times 6 + 2 = 182$$

et $\bar{43} \text{ pour } 4 + 3 \times \frac{1}{6} = 4,5.$

1. Convertir de notre système au système S. I. S. et vice versa les nombres :
 $30 \quad 56 \quad \bar{5} \quad \bar{23} \quad \bar{52}.$
2. Les E. T. commencent la liste croissante de leurs nombres entiers comme suit : $\bar{0}$; $\bar{1}$; $\bar{2}$; $\bar{3}$; $\bar{4}$; $\bar{5}$; $\bar{10}$. Écrire dans un tableau à six colonnes les nombres entiers depuis $\bar{0}$ jusqu'à $\bar{55}$ de gauche à droite et de haut en bas. Quel est le nombre entier suivant $\bar{55}$?
3. Extraire de ce tableau la liste des multiples de $\bar{2}$, puis celle des multiples de $\bar{3}$ et enfin celle des multiples de $\bar{5}$. Comment reconnaît-on les multiples de $\bar{2}$? les multiples de $\bar{3}$? les multiples de $\bar{5}$?
4. Démontrer les critères de divisibilité des nombres S. I. S. vus au-dessus.
5. Effectuer dans le S. I. S. les opérations que vous poserez comme suit (sans oublier les retenues) :

$$\begin{array}{r} \bar{451} \\ + \quad \bar{505} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \bar{513} \\ - \quad \bar{451} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \bar{34} \\ \times \quad \bar{13} \\ \hline \end{array}$$

6. Effectuer les divisions avec reste :

$$\begin{array}{r|l} 235 & \bar{2} \\ \hline & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 444 & \bar{12} \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Vous pourrez donner la liste des multiples de $\overline{12}$.

7. Effectuer les divisions à virgule : $\overline{35} : \overline{3}$ et $\overline{45} : \overline{4}$.

8. Calculer les nombres à virgule représentant les quotients suivants :

$$\overline{1} : \overline{2} \quad \overline{1} : \overline{3} \quad \overline{1} : \overline{4} \quad \overline{1} : \overline{5} \quad \overline{1} : \overline{10} \quad \overline{1} : \overline{11} \quad \overline{1} : \overline{12}$$

Quels sont les quotients représentés par un nombre à virgule ne comportant qu'un nombre fini de chiffres ? Généraliser.

Eléments de solution (P.L.H.)

1. $30 = 5 \times 6 = \overline{50}$; $56 = 36 + 3 \times 6 + 2 = \overline{132}$
 $\overline{5} = 5$; $\overline{23} = 2 \times 6 + 3 = 15$; $\overline{52} = 5 \times 6 + 2 = 32$.

2.

$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{30}$	$\overline{31}$	$\overline{32}$	$\overline{33}$	$\overline{34}$	$\overline{35}$
$\overline{40}$	$\overline{41}$	$\overline{42}$	$\overline{43}$	$\overline{44}$	$\overline{45}$
$\overline{50}$	$\overline{51}$	$\overline{52}$	$\overline{53}$	$\overline{54}$	$\overline{55}$

Le nombre entier suivant $\overline{55}$ est $\overline{100}$.

3. Les multiples de $\overline{2}$ sont dans les colonnes 1, 3, 5 de dernier chiffre pair ($\overline{0}$, $\overline{2}$, $\overline{4}$)

Les multiples de $\overline{3}$ sont dans les colonnes 1 et 4. Leur dernier chiffre est $\overline{0}$ ou $\overline{3}$.

Les multiples de $\overline{5}$ sont : $\overline{0}$, $\overline{5}$, $\overline{14}$, $\overline{23}$, $\overline{32}$, $\overline{41}$, $\overline{50}$, $\overline{55}$. La somme de leur chiffre est $\overline{5}$ ou un multiple de $\overline{5}$.

4. La base 6 étant un multiple de $\bar{2}$, un nombre est multiple de $\bar{2}$ si et seulement si son chiffre des unités est pair ($\bar{0}$, $\bar{2}$, $\bar{4}$).

6 étant un multiple de $\bar{3}$, un nombre est multiple de $\bar{3}$ si et seulement si son chiffre des unités est un multiple de $\bar{3}$ ($\bar{0}$, $\bar{3}$).

Pour tout k entier, $6^k = (5 + 1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} 5^j = 1 + 5 \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} 5^{j-1}$,

autrement dit, 6^k est la somme de 1 et d'un multiple de 5, ou encore $6^k \equiv 1 \pmod{5}$.

Ceci peut aussi se démontrer par récurrence car $6 \equiv 1 \pmod{5}$ et

si $6^k \equiv 1 \pmod{5}$, $6^{k+1} = 6 \cdot 6^k \equiv 1 \cdot 1 \pmod{5} = 1 \pmod{5}$.

Le nombre $\overline{a\bar{b} \dots \bar{n}}$ est donc égal à un multiple de $5 + \bar{a} + \bar{b} + \dots + \bar{n}$ et c'est un multiple de 5 si et seulement si la somme de ses chiffres, $(\bar{a} + \bar{b} + \dots + \bar{n})$ est un multiple de 5.

- 5, 6, 7 Pour effectuer les calculs demandés, il est commode de construire d'abord une table d'addition et une table de multiplication.

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{10}$	$\bar{11}$	$\bar{12}$	$\bar{13}$	$\bar{14}$

×	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{10}$	$\bar{12}$	$\bar{14}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{10}$	$\bar{13}$	$\bar{20}$	$\bar{23}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{12}$	$\bar{20}$	$\bar{24}$	$\bar{32}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{14}$	$\bar{23}$	$\bar{32}$	$\bar{41}$

On obtient :

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \overline{451} \\
 + \quad \overline{505} \\
 \hline
 \overline{1400}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{513} \\
 - \quad \overline{451} \\
 \hline
 \overline{22}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{34} \\
 \times \quad \overline{23} \\
 \hline
 \overline{150}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \overline{235} \mid \overline{2} \\
 \overline{03} \mid \overline{115} \\
 \overline{15} \mid
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{444} \mid \overline{12} \\
 \overline{44} \mid \overline{33} \\
 \overline{4} \mid
 \end{array}$$

Multiples de $\overline{12}$: $\bar{0}$, $\overline{12}$, $\overline{24}$, $\overline{40}$, $\overline{52}$, $\overline{104}$

$$\begin{array}{r}
 \overline{35} \mid \overline{3} \\
 \overline{05} \mid \overline{11,4} \\
 \overline{20} \mid \\
 \overline{0} \mid
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overline{45} \mid \overline{4} \\
 \overline{5} \mid \overline{11,13} \\
 \overline{10} \mid \\
 \overline{20} \mid
 \end{array}$$

8. $\bar{1} : \bar{2} = \overline{0,3}$; $\bar{1} : \bar{3} = \overline{0,2}$; $\bar{1} : \bar{4} = \overline{0,13}$; $\bar{1} : \bar{5} = \overline{0,111\dots}$
 $\bar{1} : \bar{10} = \overline{0,1}$; $\bar{1} : \bar{11} = \overline{0,050505\dots}$; $\bar{1} : \bar{12} = \overline{0,043}$.

Le quotient de p par q est représenté par un nombre à virgule ne

comportant qu'un nombre fini k de chiffres après la virgule si 6^k est divisible par q .

On peut supposer p et q premier entre eux, alors q divise $6^k = 2^k \times 3^k$. Cette condition est satisfaite si la décomposition en facteurs premiers de q ne comporte de des facteurs 2 et 3.

Elle est satisfaite pour $q = 2, 3, 4, 10, 12$ mais pas pour $q = 5$ et 11 .

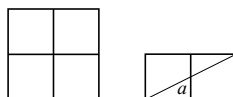
Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Angles approchés

Les mesures d'angles sont en degré. Vérifier que vos calculatrices sont en mode « degrés ».

1. En reliant trois points du quadrillage ci-contre (2×2) par deux segments, on peut construire des angles aigus, par exemple on obtient l'angle construit ci-contre de mesure a .



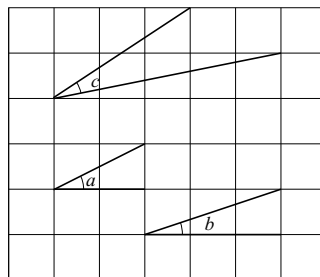
Exprimer les mesures des cinq angles aigus (différents de 0° , 45° et 90° restants en fonction de cet angle de base a et les ordonner.

2. Considérant le quadrillage ci-contre (6×7), déterminer $\tan(b)$ et donner à l'aide de votre calculatrice une valeur approchée à $0,01^\circ$ près des angles a , b et c .

Dans chaque cas, une explication de votre démarche sera la bienvenue.

3. On observe que $a + b = 45^\circ$. Démontrer ce résultat.

Une figure judicieusement conçue peut suffire.



4. Combien d'angles aigus différents peut-on tracer sur un quadrillage 3×3 ? (On déterminera trois angles de base de mesures inférieures à 45° dont une représentation sera donnée et à partir desquels, on pourra exprimer ces différents angles)
5. En utilisant trois points d'un quadrillage de taille 6×7 :

1. Quel est l'angle de plus petite mesure que l'on peut construire à $0,01^\circ$ après.
2. Définir un angle dont la valeur approche au plus près de $20,09^\circ$. Donner la précision atteinte.

Eléments de solution (P.L.H.)

1.

$a = \widehat{FGI}$ est défini par $\tan(a) = \frac{1}{2}$ et

$0 \leq a \leq 90^\circ$ d'où $a = 26,56^\circ$.

On en déduit, en utilisant la figure 1 :

$b = \widehat{FGE} = 45 - a = 18,44^\circ$

$c = \widehat{AGF} = 90 - a = 63,44^\circ$

$d = \widehat{GFA} = 2a = 53,12^\circ$

$e = \widehat{BFG} = 45 + a = 71,56^\circ$

$f = \widehat{FGB} = 90 - 2a = 36,88^\circ$.

et $b < a < f < d < c < e$.

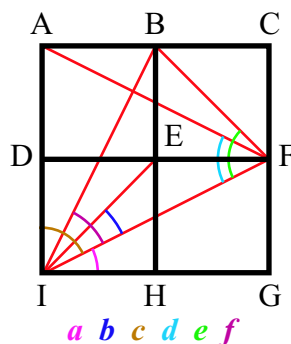


Figure 1

On peut aussi remarquer, à l'aide de la formule

$$\tan(s+t) = \frac{\tan(s) + \tan(t)}{1 - \tan(s)\tan(t)},$$

que $\tan(c) = \frac{1}{\tan(a)} = 2$, $\tan(b) = \frac{1}{3}$, $\tan(d) = \frac{4}{3}$, $\tan(e) = 3$, $\tan(f) = \frac{3}{4}$

et on retrouve l'ordre fourni par le calcul des angles puisque la fonction $\tan$ est croissante.

2. $\tan(b) = \frac{1}{3}$ d'où $b = 18,44^\circ$.

$c = d - e$ avec $\tan(d) = \frac{2}{3}$ et $\tan(e) = \frac{1}{5}$ d'où

$$\tan(c) = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}}{1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5}} = \frac{7}{17} = 0,41176 \text{ d'où } c = 22,38^\circ.$$

On peut aussi calculer $d = 33,69^\circ$ et $e = 11,31^\circ$ d'où $c = 22,38^\circ$

3.

De $\tan(a) = \frac{1}{2}$ et $\tan(b) = \frac{1}{3}$, on déduit :

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{5}{5} = 1 \text{ d'où } a+b = 45^\circ.$$

On peut aussi utiliser la figure 2 :

P est l'image de Q par la rotation de centre R et d'angle 90° ; le triangle PRQ est donc à la fois isocèle et rectangle en R donc $\widehat{RPQ} = \widehat{RQP} = 45^\circ$.

Mais $\widehat{RPQ} = \widehat{RPS} + \widehat{SPQ} = a + b$.

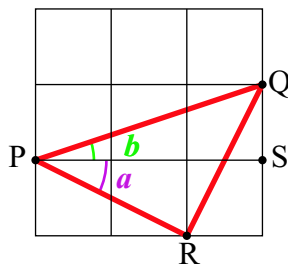


Figure 2

4.

Un angle aigu est caractérisé par son sommet et ses deux côtés formant une paire de demi-droites.

Pour un tel angle, les sommets possibles sont : (cf. figure 3)

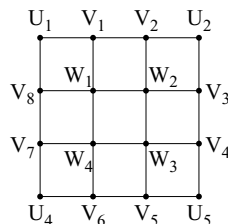


Figure 3

a) Les quatre points U_1, U_2, U_3, U_4 .

Pour un tel sommet, il y a (cf. figure 4) 9 demi-droites possibles :

$[U_4U_1), [U_4V_1), [U_4W_1), [U_4V_2), [U_4U_2), [U_4W_1) (= [U_4W_2) = [U_4W_4)), [U_4V_3), [U_4W_3), [U_4V_4), [U_4U_3)$.

Donc $\binom{9}{2} = 36$ angles possibles, tous

aigus sauf un $(\widehat{U_1U_4U_3})$ qui est droit.

Il y a donc $35 \times 4 = 140$ angles de ce type.

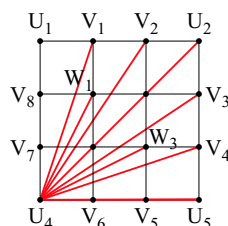


Figure 4

b) Les huit points $V_1 \dots V_8$.

Pour un sommet de ce type, il y a (cf. figure 5) 11 demi-droites possibles

donc $\binom{11}{2} = 55$ angles possibles donc $5 + 3 + 2 + 1 = 11$ sont plats, obtus ou droits.

Il en reste 44 pour chacun des huit sommets, soit $44 \times 8 = 352$ angles aigus.

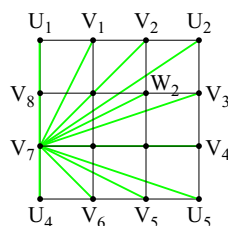


Figure 5

c) Les quatre points W_1, W_2, W_3, W_4 .

Pour un sommet de ce type, il y a (cf. figure 6) 12 demi-droites possibles

donc $\binom{12}{2} = 66$ angles possibles dont $1+1+2+3+3+3+3+3+2+2+1 = 27$ angles aigus.

Il y a donc $27 \times 4 = 108$ angles aigus de ce type.

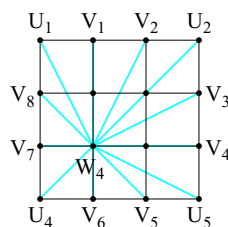


Figure 6

Finalement, on trouve $140 + 352 + 108 = 600$ angles aigus différents possibles.

Bien entendu, beaucoup de ces angles ont la même mesure : les différentes mesures se déterminent à partir de 90° , 45° et des trois angles de base déjà calculés à la question 2 :

$\frac{12}{35}$ étant une approximation par défaut de $\tan(20,09^\circ)$ on peut essayer

$$\frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{5 \times 7}} = \frac{6}{17} = 0,3529 \text{ qui est encore par défaut mais meilleure. On a}$$

$0,3529 = \tan(16,43^\circ)$ et cet angle est représenté par $\widehat{BAC}$ sur la figure 8.

$$\text{Par contre } \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{5 \times 6}} = \frac{11}{29} = 0,3793 \text{ est une approximation par excès et}$$

$0,3793 = \tan(20,79^\circ)$ et cet angle est représenté par $\widehat{BAD}$ sur la figure 8.

Finalement, $19,43^\circ$ est une approximation de $20,09^\circ$ à $0,66^\circ$ près par défaut, meilleure que $20,79^\circ$, approximation à $0,70^\circ$ près par excès.

Exercice n° 3 (Série S)

Enoncé

Processus opératoire

On définit le processus de calcul suivant pour x un nombre entier de l'intervalle $[1 ; 99]$:

- y est le plus petit des deux nombres x et $100 - x$.
- z est le « renversé » de y écrit avec deux chiffres :
Ainsi : si $y = 18$ alors $z = 81$;
si $y = 3$ on considère $y = 03$ et alors $z = 30$.
- $P(x) = \frac{x+z}{2}$ si $\frac{x+z}{2}$ est entier, sinon $P(x) = \frac{x+z-1}{2}$.

1. Vérifier, en reproduisant et complétant le tableau suivant, que $P(73) = 72$.

x	y	z	$\frac{x+z}{2}$	$P(x)$
73	?	?	?	?

2. On pose $x_1 = 20$. Calculer $x_2 = P(x_1)$, puis $x_3 = P(x_2)$.
Qu'en déduisez-vous ?
Si on répétait l'opération, que trouverions-nous pour $x_{2\,009}$?
3. On recommence avec $x_1 = 1$. Calculer $x_2, x_3, x_4, \dots$ jusqu'à x_{12} .
Que remarque-t-on ?
En déduire, dans ce cas la valeur de $x_{2\,009}$.

4. Existe-t-il un nombre de départ x_1 tel que la liste des nombres obtenus ne comporte aucune répétition ?

Eléments de solution (P.L.H.)

1. Pour $x = 73$, on a le tableau

x	y	z	$\frac{x+z}{2}$	$P(x)$
73	27	72	72,5	72

2. * $x_2 = P(20) = \frac{20+2}{2} = 11$,
 * $x_3 = P(x_2) = \frac{11+11}{2} = 11$ puis $P(x_n) = 11$ pour tout $n \geq 2$ et en particulier pour $n = 2009$.
3. * $x_2 = P(1) = \frac{1+10-1}{2} = 5$,
 * $x_3 = P(5) = \frac{55-1}{2} = 27$,
 * $x_4 = P(27) = \frac{27+72-1}{2} = 49$,
 * $x_5 = P(49) = \frac{49+94-1}{2} = \frac{142}{2} = 71$,
 * $x_6 = P(71) = \frac{71+17}{2} = \frac{88}{2} = 44$,
 * $x_7 = P(44) = \frac{44+44}{2} = 44$

Ainsi, $x_k = 44$ pour tout $k \geq 6$ et en particulier pour $k = 2009$.

4. On a $x \leq 99$ et donc $y \leq 99$ puis $z \leq 99$ et $P(x) \leq 99$. On a donc au plus 99 valeurs distinctes de x_k et il existe un $n \leq 100$ tel que x_n soit égal à l'un des x_k pour $k \leq n$.