

# LILLE

## Exercice n° 1 (Série S)

### Enoncé

#### Les inverses

Dans cet exercice on recherche les triplets de réels strictement positifs  $(x ; y ; z)$  vérifiant les deux conditions suivantes :  $xyz > 1$  et  $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ .

1. Montrer que le triplet  $\left(4 ; 4 ; \frac{1}{8}\right)$  vérifie ces conditions.
2. On choisit  $x = 2\,009$  et  $y = \frac{1}{2\,009}$ . Est-il possible de déterminer  $z$  ?
3. Montrer que le triplet  $\left(\frac{1}{2\,009} ; \frac{2\,009}{2} ; \frac{2\,009}{2}\right)$  vérifie les conditions.
4. On choisit  $x = 1$  : est-il possible de déterminer  $y$  et  $z$  ?
5. Peut-on avoir  $x = y = z$  ?
6. Démontrer qu'au moins un des trois nombres  $x$ ,  $y$  ou  $z$  est plus grand que 1.
7. Démontrer qu'au moins un des trois nombres  $x$ ,  $y$  ou  $z$  est plus petit que 1.
8. À quelles conditions le triplet  $\left(x ; \frac{1}{2x} ; \frac{1}{2x}\right)$  convient-il ? En déduire qu'il existe une infinité de triplets qui conviennent.

### Eléments de solution

2. On obtient  $z > 1$  et  $z < \frac{1}{z}$  d'où une contradiction.
4. On obtient  $yz > 1$  et  $y + z < \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  d'où une impossibilité.
5.  $x^3 > 1$  et  $x < \frac{1}{x}$ . Impossible.

6. Raisonnement par l'absurde : si  $x < 1, y < 1, z < 1$  alors  $xyz < 1$  ce qui est impossible.
7. Raisonnement par l'absurde : si  $x > 1, y > 1, z > 1$  alors  $x > \frac{1}{x}, y > \frac{1}{y}, z > \frac{1}{z}$  d'où  $x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ , ce qui est impossible.

## Exercice n° 2 (Série S)

### Énoncé

#### Et pourtant il tourne

**I** Un carré ABCD de côté 1 cm « roule » sans glisser dans le sens des aiguilles d'une montre sur un segment [IJ] de longueur  $n$  cm ( $n$  entier naturel non nul). La position initiale est représentée sur la figure 1.

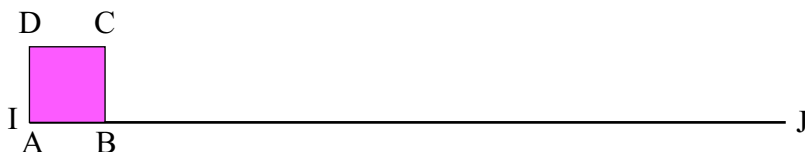


figure 1

Le carré pivote d'abord autour du point B (figure 2) jusqu'à ce que le point C soit sur [IJ] puis le carré pivote autour du point C jusqu'à ce que le point D soit sur [IJ]. On continue ainsi jusqu'à ce qu'un sommet du carré ABCD coïncide avec le point J.



figure 2

1. Si  $n = 10$ , quel sera le sommet du carré ABCD confondu avec J dans la position finale ?
2. Toujours pour  $n = 10$ , quelle est la longueur de la trajectoire parcourue par le point A depuis la position initiale jusqu'à la position finale ?
3. Pour quelles valeurs de  $n$ , le point B est-il confondu avec le point J dans la position finale ?

**II.** Cette fois le carré ABCD, toujours de côté 1 cm, « roule » sans glisser dans le sens des aiguilles d'une montre sur le pourtour d'un triangle équilatéral EFG de côté  $n$  cm ( $n$  entier naturel non nul). La position initiale est représentée sur la figure 3.

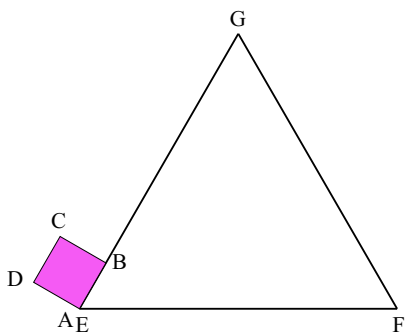


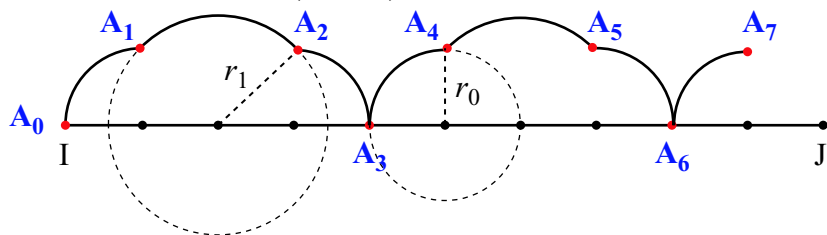
figure 2

Le périple du carré ABCD s'achève lorsqu'un sommet du carré ABCD coïncide avec le point E.

1. Si  $n = 5$ , quel sera le sommet du carré ABCD confondu avec E dans la position finale ?
2. Toujours pour  $n = 5$ , quelle est la longueur de la trajectoire parcourue par le point A depuis la position initiale jusqu'à la position finale ?
3. Pour quelles valeurs de  $n$ , le point A est-il confondu avec le point E dans la position finale ?

## Eléments de solution

- I. 1. Le point C     $2\pi \left( \frac{5}{2} + \sqrt{2} \right)$  cm.    3.  $n = 4k + 1$  avec  $k$  entier naturel.



$A_0, A_1 \dots A_7$  : positions successives du point A ;  $r_0 = 1$ ,  $r_1 = \sqrt{2}$ .

- II.1. Le point D.    2.  $\frac{\pi}{6} (25 + 16\sqrt{2})$  cm 3.

On trouve comme condition  $3n$  multiple de 4, soit  $n$  multiple de 4.

## Exercice n° 3 (Séries ES-L-T)

### Enoncé

#### Une multiplication olympique

Pour calculer le produit  $2\,651 \times 34$ , Luc a posé la multiplication suivante pour obtenir le résultat 90 134

$$\begin{array}{r}
 \phantom{\times} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{6} \phantom{0} \phantom{4} \\
 \phantom{\times} \phantom{1} \phantom{0} \phantom{6} \phantom{0} \phantom{4} \\
 \times \phantom{1} \phantom{0} \phantom{6} \phantom{0} \phantom{4} \\
 \hline
 1 \phantom{0} \phantom{6} \phantom{0} \phantom{4} \\
 7 \phantom{9} \phantom{5} \phantom{3} \\
 \hline
 9 \phantom{0} \phantom{1} \phantom{3} \phantom{4}
 \end{array}$$

Dans la multiplication ci-dessous, on a adopté la même disposition. Sachant que deux lettres différentes représentent toujours deux chiffres différents, trouver le résultat de cette multiplication.

$$\begin{array}{r}
 \phantom{\times} \phantom{O} \phantom{L} \phantom{Y} \phantom{M} \\
 \phantom{\times} \phantom{O} \phantom{L} \phantom{Y} \phantom{M} \\
 \times \phantom{O} \phantom{L} \phantom{Y} \phantom{M} \\
 \hline
 \phantom{O} \phantom{L} \phantom{Y} \phantom{M} \\
 \phantom{O} \phantom{L} \phantom{Y} \phantom{M} \\
 \hline
 A \phantom{D} \phantom{E} \phantom{?} \\
 \hline
 ? \phantom{?} \phantom{?} \phantom{?} \phantom{?}
 \end{array}$$

## Eléments de solution

OLYM est un diviseur de 9 394.

$9\,394 = 2 \times 7 \times 671$  donc I est égal soit à 2, soit à 7.

Comme deux lettres différentes représentent toujours deux chiffres différents, les essais avec I égal à 2 aboutissent à des échecs. Pour I égal à 7, le seul essai concluant donne P égal à 6.

Ceci donne :

$$\begin{array}{r}
 \phantom{\times} \phantom{1} \phantom{3} \phantom{4} \phantom{2} \\
 \phantom{\times} \phantom{1} \phantom{3} \phantom{4} \phantom{2} \\
 \times \phantom{1} \phantom{3} \phantom{4} \phantom{2} \\
 \hline
 \phantom{1} \phantom{3} \phantom{4} \phantom{2} \\
 \phantom{1} \phantom{3} \phantom{4} \phantom{2} \\
 \hline
 8 \phantom{0} \phantom{5} \phantom{2} \\
 \hline
 8 \phantom{9} \phantom{9} \phantom{1} \phantom{4}
 \end{array}$$

## Exercice n° 4 (Séries ES-L-T)

### Enoncé

#### Réussir 2009

On construit successivement des nombres de la façon suivante :

On débute avec le nombre 4 et on lui applique au choix l'une des règles suivantes :

- on le divise par 2 (cette règle ne peut être appliquée que si le résultat est entier) ;
- on le multiplie par 10 ;
- on le multiplie par 10 et on ajoute 4.

On réitère le processus autant de fois que l'on veut. Par exemple on construit la suite de nombres :  $4 - 2 - 20 - 204 - 102 - 51 - 510 \dots$

1. Montrer que l'on peut obtenir 3 en 5 étapes.
2. Comment obtenir le nombre 100 ?
3. Peut-on obtenir 2009 ?
4. Peut-on obtenir 2009 si la première règle est remplacée par : « on le divise par 3 », les autres règles étant inchangées ?

## **Eléments de solution**

On inverse le processus. 2009-4018-8036-16072-32144-3214-321-642-1284-128-256-512-1024-102-204-20-2-4

Pour la première étape, 2009 ne se termine ni par 0 ni par 4. Il faut donc le multiplier par 3. Le second nombre est impair donc, même observation, on est obligé chaque fois de multiplier par 3, ce qui ne permet pas d'obtenir 4.