

GRENOBLE

Exercice n° 1 (Séries S-STI)

Enoncé

L'escalier

En 1675, François Blondel se penche sur la question du calcul de l'escalier dans son cours d'architecture enseigné à l'académie royale d'architecture. Il constate « qu'à chaque fois qu'on s'élève d'un pouce, la valeur de la partie horizontale se trouve réduite de deux pouces et que la somme du double de la hauteur de la marche et de son giron doit demeurer constante et être de deux pieds ».

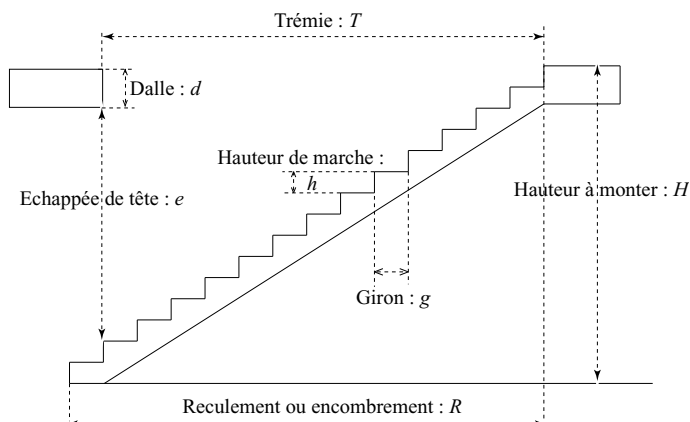
Autrement dit : $M = 2h + g$, où M est le module ou pas et vaut 2 pieds (64,8 cm), h la hauteur de la marche, et g son giron (profondeur d'une marche d'escalier mesurée en son milieu).

L'idée directrice est que l'effort fait par la personne qui monte soit constant, que l'escalier soit ou non droit.

De nos jours, le pas usuel est de 63 cm.

Ainsi on a : $2h + g = 63$.

Dans cet exercice toutes les longueurs sont exprimées en centimètres. Les réponses seront arrondies à 0,1 cm.



Dans les constructions modernes l'échappée de tête doit être d'au moins 2 mètres. Dans l'étude qui suit, la hauteur à monter H est de 3 mètres, la dalle a une épaisseur de 30 centimètres. Un escalier est déterminé par le nombre de marches, leur hauteur et leur giron.

1. On réalise un escalier droit de 19 marches. La trémie mesure 4,8 mètres. Calculer le giron, le reculement et l'échappée de tête de l'escalier.
2. On dispose d'un reculement maximum de 4 mètres. Calculer les dimensions de l'escalier le moins pentu possible. Quelle doit être la dimension minimale de la trémie ?
3. On dispose d'une trémie de 2,60 mètres. Quelles sont les dimensions de l'escalier le moins pentu possible ? Quel est son reculement ?

Eléments de solution

Principales formules :

h (hauteur d'une marche) = $\frac{H \text{ (hauteur à monter)}}{n \text{ (nombre de marches)}}$
 et R (reculement) = $(n - 1) \times g$ (giron).

1. n est le nombre de marches.

Dans cette question, $n = 19$ donc

$$h = \frac{300}{19} \approx 15,8 \text{ cm.}$$

$$g = 63 - 2h = 63 - 2 \times \left(\frac{300}{19}\right) \approx 31,4 \text{ cm.}$$

$$R = (n - 1)g = 18 \times \left(63 - \frac{600}{19}\right) \approx 565,6 \text{ cm.}$$

Le nombre de marches descendues est alors $E\left(\frac{T}{g}\right) + 1 \approx E\left(\frac{480}{31,4}\right) + 1 = 16$.

L'échappée de tête est donc égale à

$$e = 16h - 30 \approx 16 \times \frac{300}{19} - 30 \approx 222,6 \text{ cm.}$$

2. Dans cette question, on doit avoir $R = (n - 1) \left(63 - \frac{600}{n}\right) \leq 400$.

Résolvons cette inéquation. Elle équivaut à

$$\begin{aligned} (n - 1)(63n - 600) &\leq 400n \Leftrightarrow 63n^2 - 63n - 600n + 600 \leq 400n \\ &\Leftrightarrow 63n^2 - 1063n + 600 \leq 0 \end{aligned}$$

On a $\Delta = 978\,769$ puis

$$n_1 = \frac{1063 - \sqrt{\Delta}}{2 \times 63} \approx 0,58 \text{ et } n_2 = \frac{1063 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 63} \approx 16,30.$$

16 est le plus grand nombre possible de marches.

L'escalier comporte donc 16 marches d'une hauteur de 18,75 cm.

Le giron est alors de $63 - 2 \times 18,75 = 25,5$ cm.

On note x le nombre de marches descendues. On doit avoir

$$\frac{230}{x} \leq 18,75 \Leftrightarrow x \geq \frac{230}{18,75} \approx 12,27.$$

Il faut descendre d'au moins 13 marches : la trémie vérifie donc $T \geq 13 \times 25,5$.
Elle doit donc dépasser 331,5 cm.

3. Pour que l'échappée soit d'au moins 2 mètres, on doit avoir

$$\left[E \left(\frac{T}{63} - \frac{2H}{nh} \right) + 1 \right] \times \frac{H}{n} \geq 230.$$

Utilisons la table de la calculatrice :

$$Y_1 = 260/(63 - 600/X) \text{ et } Y_2 = (\text{int}(Y_1) + 1) * 300/X.$$

Si $n = 14$ alors $e \approx 278,6$ cm,

si $n = 15$, alors $e \approx 240$ cm,

si $n = 16$, alors $e \approx 206,3$ cm.

L'escalier doit comporter 15 marches d'une hauteur de 20 cm. Le reculement est alors de $(15 - 1) \times (60 - 2 \times 20) = 322$ cm.

Autre méthode

$$\begin{aligned} \text{On doit avoir } \frac{260}{63 - \frac{600}{n}} \times \frac{300}{n} &\leq 230 \leq \left(\frac{260}{63 - \frac{600}{n}} + 1 \right) \times \frac{300}{n} \\ \frac{260 \times 300}{63n - 600} &\leq 230 \leq \frac{260 \times 300}{63n - 600} + \frac{300}{n}. \end{aligned}$$

Le giron est positif donc

$$78\,000 \leq 230(63n - 600) \Leftrightarrow 230 \times 63n \geq 78\,000 + 230 \times 600$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{216\,000}{230 \times 63} \approx 14,9.$$

La deuxième inégalité conduit à $14\,490n^2 - 234\,900n + 180\,000 \leq 0$.

n doit être compris entre 1 et 15.

L'escalier comporte 15 marches d'une hauteur de 20 cm. Le giron est alors de 223 cm, le reculement de 322 cm.

Exercice n° 2 (Séries ES-L-T)

Enoncé

Fractions égyptiennes

On appelle fraction unitaire ou fraction égyptienne une fraction d'entiers dont le numérateur est égal à 1. On démontre et nous admettons que toute fraction comprise entre 0 et 1 peut s'exprimer comme somme de fractions unitaires dont tous les dénominateurs sont distincts deux à deux.

Cette somme est appelée un développement égyptien.

Par exemple : $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ est un développement égyptien.

1. Donner un développement égyptien en une somme de deux fractions de :

(a) $\frac{3}{20}$.

(b) $\frac{2}{17}$.

2. Montrer qu'aucune fraction strictement comprise entre $\frac{5}{6}$ et 1 ne peut se décomposer comme somme de 2 fractions égyptiennes.

3. Donner un développement égyptien en une somme de trois fractions de :

(a) $\frac{19}{20}$

(b) $\frac{5}{121}$

(c) $\frac{4}{17}$.

Eléments de solution

1.a. On a $\frac{1}{7} < \frac{3}{20} < \frac{1}{6}$ et $\frac{3}{20} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}$ donc $\frac{3}{20} = \frac{1}{7} + \frac{1}{140}$.

b. On a $\frac{1}{9} < \frac{2}{17} < \frac{1}{8}$ et $\frac{2}{17} - \frac{1}{9} = \frac{1}{153}$ donc $\frac{2}{17} = \frac{1}{9} + \frac{1}{153}$

2. La plus grande somme réalisable avec deux fractions égyptiennes distinctes est $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

3. Il existe de nombreuses méthodes et différents résultats possibles pour cette question. On peut par exemple prendre :

a. $\frac{19}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

b. $\frac{5}{121} = \frac{1}{33} + \frac{1}{121} + \frac{1}{363}$.

c. $\frac{4}{17} = \frac{1}{5} + \frac{1}{30} + \frac{1}{510}$

Exercice n° 3 (Toutes séries)

Enoncé

Un petit jeu

Voici un petit jeu. Au départ, on dispose de 16 cases numérotées comme indiquées ci-dessous.

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

On s'autorise à faire autant de fois que l'on veut les actions suivantes :

- Choisir les deux premières lignes ou les deux dernières et les échanger.
- Choisir les deux premières colonnes ou les deux dernières et les échanger.
- Choisir une ligne ou une colonne et échanger le premier terme avec le dernier et le deuxième avec le troisième.

1. Montrer que l'on peut obtenir la position suivante :

22	21	24	23
12	11	14	13
42	41	44	43
32	31	34	33

2. Peut-on obtenir n'importe quelle position ? Si oui pourquoi, sinon donner une position impossible et expliquer pourquoi.

Eléments de solution

1- On échange les deux premières colonnes,
on échange les deux dernières colonnes,
on échange les deux premières lignes,
on échange les deux dernières lignes.

Et on arrive au résultat désiré.

2- Non car chaque « opération autorisée » échange un nombre pair de « paires de cases ».

Ainsi, tout échange d'une seule paire ne peut être obtenue.

Ainsi la position

12	11	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

ne peut être obtenue.