

# DIJON

## Exercice n° 1

### Enoncé

#### Les nombres « sigma »

*Prérequis - Dans cet exercice, on suppose connus les deux résultats suivants :*

- *il existe une infinité de nombres premiers ;*
- *si un entier  $N$  supérieur ou égal à 2 admet la décomposition en facteurs premiers :  $N = p^a \times q^b \times \dots$ , où  $p, q, \dots$  sont des nombres premiers distincts, alors le nombre de diviseurs positifs de  $N$  est égal à :  $(a+1) \times (b+1) \times \dots$ .*

*Par exemple  $12 = 2^2 \times 3^1$  admet  $3 \times 2 = 6$  diviseurs : 1, 2, 3, 4, 6 et 12.*

On dit qu'un nombre entier naturel non nul est « sigma » lorsqu'il est divisible par le nombre de ses diviseurs positifs. Par exemple, 12 est « sigma » car il possède 6 diviseurs positifs et 6 divise 12. En revanche, 22 n'est pas « sigma » car il possède 4 diviseurs positifs : 1, 2, 11, 22, et 4 ne divise pas 22.

1. 69 est-il « sigma » ? 84 est-il « sigma » ? Un nombre premier peut-il être « sigma » ?
2. Démontrer que si  $N$  est un entier « sigma » impair supérieur à 1, alors l'entier  $2N$  est « sigma ».
3. Démontrer que si  $N$  est un entier « sigma » impair, alors  $N$  est nécessairement un carré parfait. La réciproque est-elle vraie ?
4. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres « sigma ».

### Éléments de solution

1. 69 admet 4 diviseurs positifs : 1, 3, 23, 69, et 4 ne divise pas 69. Donc 69 n'est pas « sigma ».

2. Le seul nombre premier « sigma » est 2 car si  $p$  est un nombre premier impair,  $p$  admet exactement 2 diviseurs positifs et 2 ne divise pas  $p$ . Si  $N$

est supérieur à 1, impair et « *sigma* », alors  $N$  admet une décomposition en facteurs premiers :  $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$  avec  $2 < p_1 < \dots < p_r$  où les  $\alpha_i$  sont des entiers non nuls tels que  $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$  divise  $N$ . La décomposition de  $N$  est alors :  $2N = 2 \times p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$  ce qui montre que le nombre de diviseurs de  $2N$  est le double de celui de  $N$ . Donc ce nombre divise  $2N$ , ce qui prouve que  $2N$  est « *sigma* ».

## Exercice n° 2

### Enoncé

#### « Concourantes ou parallèles »

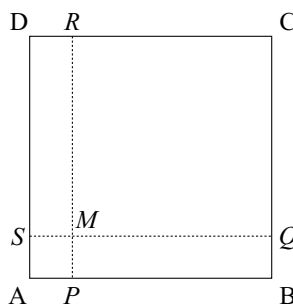
Sur la figure ci-contre, ABCD est un carré de côté 1,  $M$  est un point intérieur au carré, les quadrilatères  $APMS$  et  $MQCR$  sont des rectangles.

*Premier cas particulier*

Dans cette question, on suppose que  $AP = \frac{3}{4}$

et que  $AS = \frac{1}{4}$ .

Démontrer que les droites  $(AC)$ ,  $(PQ)$  et  $(RS)$  sont parallèles.



*Deuxième cas particulier*

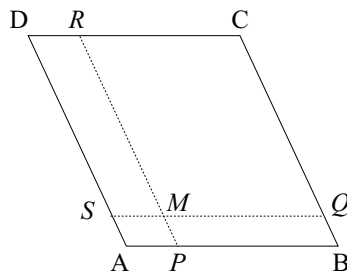
Dans cette question, on suppose que  $AP = \frac{1}{4}$  et que  $AS = \frac{1}{3}$ .

Déterminer une équation des droites  $(PQ)$  et  $(RS)$  dans le repère  $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$  et en déduire que les droites  $(AC)$ ,  $(PQ)$  et  $(RS)$  sont concourantes.

*Généralisation*

Cette fois ABCD est un parallélogramme,  $M$  est un point intérieur à ce parallélogramme et les quadrilatères  $APMS$  et  $MQCR$  sont des parallélogrammes.

Démontrer que les droites  $(AC)$ ,  $(PQ)$  et  $(RS)$  sont en général concourantes sauf pour certaines positions particulières de  $M$  que l'on précisera.



### Eléments de solution

1. Dans ce cas, les quadrilatères PBQM et MRDS sont des carrés, les angles  $\widehat{BPQ}$ ,  $\widehat{BAC}$  et  $\widehat{MSR}$  mesurent  $45^\circ$  et les droites  $(AC)$ ,  $(PQ)$  et  $(RS)$  sont parallèles.

**2.** Les droites (AC), (PQ) et (RS) ont pour équations respectives :  $y = x$ ,  $4x - 9y = 1$  et  $-8x + 3y = 1$ . Elles sont concourantes au point de coordonnées  $\left(-\frac{1}{5} ; -\frac{1}{5}\right)$

**3.** Appelons  $(a, b)$  les coordonnées de M dans le repère  $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}\right)$ . Les équations des droites (PQ) et (RS) sont respectivement  $bx + (a - 1)y = ab$  et  $(b - 1)x + ay = ab$ .

Le système  $\begin{cases} bx + (a - 1)y = ab \\ (b - 1)x + ay = ab \end{cases}$  équivaut à  $\begin{cases} bx + (a - 1)y = ab \\ (a + b - 1)x = ab \end{cases}$

Si  $a + b - 1 = 0$  c'est-à-dire si le point M appartient à la droite (BD), alors les droites (AC), (PQ) et (RS) ont pour équations respectives :  $y = x$ ,  $y = x - a$  et  $y = x + b$  et sont parallèles.

Si  $a + b - 1 \neq 0$  alors elles sont concourantes au point de coordonnées  $\left(\frac{ab}{a + b - 1} ; \frac{ab}{a + b - 1}\right)$ .