

CRÉTEIL

Exercice n° 1

(Série S)

Énoncé

Des n -machines

Soit n un entier naturel compris entre 2 et 10.

Une « n -machine » n'effectue que des calculs utilisant les quatre opérations sur des nombres entiers naturels.

Pour cette « n -machine », a , b et c étant des entiers naturels compris entre 0 et $n - 1$, le nombre noté $\overline{abc}$ représente le nombre $a \times n^2 + b \times n + c$. Il existe donc neuf n -machines différentes. Par exemple, pour la « 4-machine ».

- le nombre noté $\overline{231}$ représente le nombre $2 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1 = 45$;
- le nombre noté $\overline{13}$ représente le nombre $1 \times 4 + 3 = 7$;
- le nombre noté $\overline{2}$ représente le nombre 2.

1. Quel nombre représente le nombre noté $\overline{231}$ pour la « 7-machine » ?
2. Avec les notations précédentes, on considère l'équation d'inconnue x (x étant un entier naturel) :

$$\overline{3}x + \overline{43} = \overline{211}.$$

Quelle valeur doit-on donner à n pour que la « n -machine » affiche « 21 » comme solution ?

3. Avec les notations précédentes, on considère l'équation d'inconnue x (x étant un entier naturel) :

$$x^2 - \overline{45}x + \overline{322} = \overline{0}.$$

Une autre « n -machine » affiche deux solutions entières comme solutions de cette équation.

- (a) Quelle « n -machine » a-t-on utilisée ? (Il faut donc trouver la « bonne » valeur de n)
- (b) Quelles sont les solutions affichées par cette machine ?

Eléments de solution (P.L.H.)

1. Pour la 7-machine (calcul en base 7)

$$\overline{231} = 2 \times 7^2 + 3 \times 7 + 1 = 120.$$

2. $\overline{3x} + \overline{43} = \overline{211}$

$$\overline{21} = 2n + 1.$$

$$\text{d'où : } 3(2n + 1) + 4n + 3 = 2n^2 + n + 1$$

$$\text{ou } 2n^2 - 9n - 5 = 0 \text{ soit } n(2n - 9) = 5.$$

n doit donc diviser 5 ; puisqu'on utilise le chiffre 4, on a $n \geq 5$.

donc $n = 5$ et $2n - 9 = 1$, l'équation s'écrit $3x + 23 = 56$ ou $x = 11 = \overline{21}$.

3. $x^2 - \overline{45}x + \overline{322} = 0$ se traduit sur une n -machine par

$$x^2 - (4n - 5)x + (3n^2 + 2n + 2) = 0.$$

Si cette équation a deux racines entières x_1 et x_2 , son discriminant Δ est le carré de $|x_1 - x_2|$ qui est entier :

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2|^2 &= (4n + 5)^2 - 4(3n^2 + 2n + 2) \\ &= 4n^2 + 32n + 17 \\ &= (2n + 8)^2 - 47. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } (2n + 8)^2 - |x_1 - x_2|^2 = 47$$

$$\text{ou } (2n + 8 - |x_1 - x_2|)(2n + 8 + |x_1 - x_2|) = 47.$$

47 étant premier admet la seule décomposition : $47 = 1 \times 47$.

On doit donc avoir

$$2n + 8 - |x_1 - x_2| = 1$$

$$2n + 8 + |x_1 - x_2| = 47$$

$$\text{D'où } 2(2n + 8) = 48 \text{ et } n = 12$$

$$2|x_1 - x_2| = 46 \text{ d'où } |x_1 - x_2| = 23.$$

On est ramené à résoudre $x^2 - 37x + 210 = 0$ qui a bien deux racines entières : $x_1 = 30 = \overline{26}$ et $x_2 = 7 = \overline{7}$.

Exercice n° 2

(Séries ES-L-T)

Enoncé

Un carré bien naturel

0	1	2	3	4
5	6	7	8	9
10	11	12	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24

Le carré ci-dessus est qualifié de **naturel**, car on y a écrit les nombres entiers naturels dans l'ordre, ligne après ligne, d'une façon toute « naturelle ».

1. Choisissez cinq nombres de ce carré de telle façon que deux quelconques d'entre eux n'appartiennent jamais ni à la même ligne, ni à la même colonne. Calculez ensuite la somme de ces cinq nombres. Recommencez avec cinq autres nombres choisis de la même façon. Que constatez-vous ?
2. En utilisant cinq couleurs différentes, coloriez les 25 cases du carré de telle sorte que deux cases quelconques de la même couleur n n'appartiennent jamais ni à la même ligne, ni à la même colonne. On appellera un tel coloriage un « bon coloriage ». Calculez la somme des nombres écrits sur les cases d'une même couleur. Que constatez-vous ?
3. Le nombre écrit à l'intersection de la 2^e ligne et de la 4^e colonne est 8. Exprimez la valeur du nombre écrit à l'intersection de la i -ème ligne et de la j -ème colonne en fonction de i et de j .
4. Démontrez que dans n'importe quel « bon coloriage » d'un carré naturel 5×5 , la somme des nombres écrits sur les cases d'une même couleur est une constante.
5. Dans un carré de 100 cases sur 100 cases, on a écrit les nombres de 0 à 9 999. On admet qu'il est possible de réaliser un « bon coloriage » à l'aide de 100 couleurs dans un carré 100×100 . Calculez la somme des nombres écrits dans les cases d'une même couleur d'un tel carré.

Éléments de solution (P.L.H.)

1. Par exemple, en choisissant les deux diagonales :

$$0 + 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

et $20 + 16 + 12 + 8 + 4 = 60.$

2. Exemple de bon coloriage :

Blanc : $0 + 21 + 17 + 13 + 9 = 60$

Jaune : $1 + 5 + 14 + 18 + 22 = 60$

Noir : $2 + 6 + 10 + 19 + 23 = 60$

Rouge : $15 + 11 + 7 + 3 + 24 = 60$

Vert : $20 + 16 + 12 + 8 + 4 = 60.$

B	J	N	R	V
J	N	R	V	B
N	R	V	B	J
R	V	B	J	N
V	B	J	N	R

3. Soit C_{ij} le nombre écrit dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne.
Par construction : $C_{ij} = C_{i1} + (j - 1)$ et $C_{i1} = 0 + 5(i - 1)$
d'où $c_{ij} = (j - 1) + 5(i - 1).$
4. Choisissons dans la $i^{\text{ème}}$ ligne le nombre inscrit dans la colonne j_i .
Pour avoir un bon coloriage, il est nécessaire que $j_1, j_2, \dots, j_5$ soient distincts de sorte que $j_1 + j_2 + \dots + j_5 = 1 + 2 + \dots + 5 = 15$.
La somme des nombres écrits sur les cases d'une même couleur est donc

$$\begin{aligned}
C_{1j_1} + C_{2j_2} + \dots + C_{5j_5} &= \\
&= (j_1 - 1) + (j_2 - 1) + 5 + (j_3 - 1) + 10 + (j_4 - 1) + 15 + (j_5 - 1) + 20 \\
&= j_1 + j_2 + \dots + j_5 - 5 + 5 + 10 + 15 + 20 \\
&= 15 + 10 + 15 + 20 = 60.
\end{aligned}$$

5. On a cette fois la somme

$$S = \sum_{j=1}^{100} (j-1) + 100 \sum_{i=1}^{100} (i-1) = 101 \times \frac{99 \times 100}{2} = 499\,950.$$

Exercice n° 3

Enoncé

Même aire ?

Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle rectangle en A, ABEF et AGHC sont des carrés.

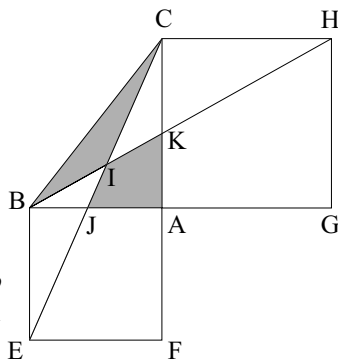
On pose $AB = a$ et $AG = b$.

K est le point d'intersection des droites (AC) et (BH).

J est le point d'intersection des droites (AB) et (EC).

I est le point d'intersection des droites (EC) et (BH).

1. Exprimer AK en fonction de a et de b puis en déduire l'aire du triangle ABK en fonction de a et de b .
2. Montrer que le triangle IBC et le quadrilatère AJIK ont la même aire.



Eléments de solution (P.L.H.)

1. Par Thalès, $\frac{AK}{GH} = \frac{BA}{BG} = \frac{a}{b+a}$.

$$\text{Par construction, } GH = AG = b \text{ d'où } AK = \frac{ab}{b+a}$$

$$\text{et aire(ABK)} = \frac{AB \times AK}{2} = \frac{a^2b}{2(b+a)}$$

2. De même $\frac{JA}{EF} = \frac{b}{a+b}$ et $JA = \frac{ab}{a+b}$

$$\text{d'où aire(JAC)} = \frac{JA \times AC}{2} = \frac{ab^2}{2(a+b)}$$

$$\begin{aligned}\text{et aire(BJC)} &= \text{aire(ABC)} - \text{aire(JAC)} \\ &= \frac{ab}{2} - \frac{ab^2}{2(a+b)} = \frac{a^2b}{2(a+b)}\end{aligned}$$

$$\text{Donc aire(BJC)} = \text{aire(ABK)}$$

$$\begin{aligned}\text{et donc aire(IBC)} &= \text{aire(JBC)} - \text{aire(JBI)} \\ &= \text{aire(ABK)} - \text{aire(JBI)} \\ &= \text{aire(AJIK)}.\end{aligned}$$