

CORSE

Exercice n° 1

Enoncé

Soit ABC un triangle dont une mesure de l'angle $\widehat{A}$ en degrés est un réel α de $]0; 90[$. On note a , b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA, AB en cm.

1. Démontrer que l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}bc \sin \alpha$ en cm^2 .
2. (a) Par un point I du segment [AB] on mène une parallèle à la droite (BC) qui recoupe [AC] en J. Déterminer un point I de [AB] tel que le triangle AIJ et le quadrilatère BCJI aient la même aire.
(b) Dans un tel cas, est-il possible que AIJ et BCJI aient aussi le même périmètre ?
3. Un triangle ABC est tel que $AB = 8$ cm, $AC = 9$ cm et $BC = 7$ cm.
Déterminer s'ils existent, tous les points I de [AB] et J de [AC] tels que le triangle AIJ et le quadrilatère BCJI aient même aire et même périmètre.
(Dans cette question la droite (IJ) n'est plus nécessairement parallèle à (BC))

Eléments de solution

1. L'aire du triangle ABC est $\frac{AB \times CH}{2} = \frac{AB \times AC \sin \alpha}{2} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$.
2. a) D'après le théorème de Thalès $\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$. Posons $k = \frac{AI}{AB}$, alors $\frac{AI}{c} = \frac{AJ}{b} = \frac{IJ}{a} = k$. Ainsi $AI = kc$, $AJ = kb$, $IJ = ka$.
L'aire du triangle AIJ est donc égale à $\frac{1}{2}kckb \cdot \sin \alpha$.
L'aire de ABC étant $\frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$, l'aire de AIJ est la moitié de celle

de ABC si et seulement si $k^2 = \frac{1}{2}$ soit $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi $AI = \frac{1}{\sqrt{2}}AB$, donc il existe un unique point I du segment [AB] tel que l'aire de AIJ soit la moitié de celle de ABC. Il est possible de remarquer qu'un des triangles étant un agrandissement de l'autre, les aires seront dans le rapport 2 si et seulement si les longueurs des côtés sont dans le rapport $\sqrt{2}$.

b) AIJ et BCJI ont le même périmètre si et seulement si

$$ka + kb + kc = ka + b - kb + c - kc + a.$$

Soit $2k(b + c) = a + b + c$, soit $(\sqrt{2} - 1)(b + c) = a$.

Ainsi les périmètres seront égaux si et seulement si cette relation est vérifiée.

Posons $AI = x$ et $AJ = y$.

L'égalité des aires impose $\frac{1}{2}xy \cdot \sin \alpha = \frac{1}{4}bc \cdot \sin \alpha$

soit $xy = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}8 \times 9 = 36$.

L'égalité des périmètres impose $x + y = c - x + a + b - y$

soit $2(x + y) = a + b + c$ c'est-à-dire $2(x + y) = 24$.

AIJ et BCJI ont le même périmètre si et seulement si x et y sont

$$\text{solutions du système } \begin{cases} 2(x + y) = 24 \\ xy = 36 \\ 0 < x < 8 \\ 0 < y < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 - x \\ x(12 - x) = 36 \\ 0 < x < 8 \\ 0 < y < 9 \end{cases}$$

x est donc solution du trinôme

$$x(12 - x) = 36 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x - 6)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6.$$

$$\text{On a ainsi } \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 - x = 6 \\ 0 < x < 8 \\ 0 < y < 9 \end{cases}$$

Il existe donc des points uniques, I appartenant à [AB] et J appartenant à [AC], tels que le triangle AIJ et le quadrilatère BCJI aient même aire et même périmètre.

Exercice n° 2

Énoncé

Dans cet exercice on admet que tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2, se factorise de façon unique en produit de facteurs premiers.

On appelle « *L-liste* » un ensemble fini de nombres distincts, entiers naturels non nuls, tel que :

- Il y a au moins deux nombres entiers distincts dans la *L-liste* ;
 - l'un au moins des entiers de la *L-liste* est pair
 - Quels que soient les entiers pairs m et n de cette *L-liste*, le nombre $(m + n)/2$ est aussi un nombre entier de cette *L-liste*.
1. (a) Les ensembles $\{1, 2\}$, $\{2, 5, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$, sont-ils des *L-liste* ?
 (b) Déterminer toutes les *L-liste* ayant exactement deux éléments.
 (c) Donner un exemple de *L-liste* ayant 5 éléments et un exemple de *L-liste* ayant 2 009 éléments.
 2. Démontrer que dans toute *L-liste* il existe au moins un nombre entier naturel impair.
 3. Démontrer que si deux nombres pairs distincts d'une *L-liste* ont le même nombre k de facteurs 2 dans leur décomposition en facteurs premiers, alors il existe un entier de cette *L-liste* qui a dans sa décomposition en facteurs premiers un nombre de facteurs 2 strictement supérieur à k .
 4. On considère un ensemble fini de fractions positives et irréductibles dont les dénominateurs forment une *L-liste*.
 Leur somme peut-elle être un nombre entier naturel ?
 5. La somme suivante est-elle un entier naturel ?

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \cdots + \frac{2008}{2009} + \frac{2009}{2008}$$

Eléments de solution

1.a. $\{1, 2\}$ est une *L-liste* car le seul entier pair est 2, et $(2+2)/2=2$ appartient bien à $\{1, 2\}$.

$\{2, 5, 6\}$ n'est pas une *L-liste*, car $(2+6)/2=4$, n'appartient pas à $\{2, 5, 6\}$.

$\{2, 5, 7\}$ est une *L-liste*, car le seul entier pair est 2, et $(2+2)/2=2$ appartient bien à $\{2, 5, 7\}$.

1.b. Soit $\{a, b\}$ une *L-liste* de deux éléments, où par exemple a est pair. Si b est pair différent de a , la liste doit contenir $\frac{a+b}{2}$, qui n'est ni a ni b , donc b est nécessairement impair.

Réciproquement une paire contenant un entier naturel pair non nul et un entier naturel impair est une *L-liste*.

1.c. $\{2, 3, 4, 5, 7\}$ et $\{1, 2, 3, \dots, 2008, 2009\}$ sont des *L-listes*.

2. Considérons L une *L-liste* ; si elle ne contient qu'un seul nombre pair, elle

contient au moins un autre nombre impair. Si elle contient au moins deux nombres pairs, notons a et a' les deux plus petits nombres pairs de la L -liste. Le nombre $\frac{a+a'}{2}$ est entier et appartient à L ; or il est compris entre a et a' . Il ne peut donc pas être pair puisque a et a' sont les deux plus petits entiers pairs de L . Donc $\frac{a+a'}{2}$ est impair.

3. Soit L une L -liste. Soit k un entier donné, et l'ensemble L_k des éléments de L de la forme $u = 2^k \times u'$, où u' est impair. On suppose qu'il existe au moins deux éléments distincts dans L_k , dont on ordonne les éléments puis on considère alors des éléments consécutifs de L_k , $a = 2^k \times a'$ et $b = 2^k \times b'$ où a' et b' sont impairs, avec $a' < b'$.

Les éléments a et b de L étant pairs, le nombre $\frac{a+b}{2}$ est un élément de L .

De plus, $\frac{a+b}{2} = \frac{2^k a' + 2^k b'}{2} = \frac{2^k(a' + b')}{2} = 2^{k-1}(a' + b')$.

Or $a' + b'$ est la somme de deux nombres impairs, donc c'est un entier pair : il existe un entier naturel m tel que $a' + b' = 2m$ d'où $\frac{a+b}{2} = 2^k m$.

$m = \frac{a' + b'}{2}$ est entre a' et b' ; $2^k m$ n'est donc pas dans L_k et donc m est pair,

et par conséquent, il existe un entier naturel m' tel que $\frac{a+b}{2} = 2^{k+1} m'$. Le

nombre $\frac{a+b}{2^3}$ est un élément de L , il existe donc un élément de L qui a dans sa décomposition en facteurs premiers un exposant strictement supérieur à k .

4. Considérons la L -liste L des dénominateurs d'un ensemble fini de fractions irréductibles. Soit a un entier naturel de la liste pour lequel l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers est maximal. D'après la question précédente a est unique. La somme des fractions s'écrit donc

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \frac{b}{d^k a'}$$

où l'exposant k de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de a est supérieur ou égal à 1.

La fraction de dénominateur a étant irréductible son numérateur est impair.

La mise au même dénominateur impose de multiplier chaque entier b_i par un nombre pair et b par un nombre impair.

Ainsi

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} + \frac{b}{2^k a'} = \frac{2B}{2^k m} + \frac{C}{2^k m} = \frac{2B + C}{2^k m}$$

où m et C sont impairs. Cette fraction irréductible a un numérateur impair et un dénominateur pair, et le quotient ne peut donc être un entier.

5.

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \cdots + \frac{2008}{2007} + \frac{2009}{2008}$$

est une somme de fractions positives irréductibles, les dénominateurs formant une *L-liste*. Cette somme n'est donc pas un entier.