

CLERMONT-FERRAND

Exercice n° 1

Énoncé

Quand la somme est égale au produit

Tous les nombres considérés sont des nombres entiers naturels non nuls.

A

1. Peut-on trouver deux nombres entiers naturels dont la somme et le produit sont égaux à 4 ?
2. Peut-on trouver deux nombres entiers naturels dont la somme et le produit sont égaux à 2 009 ?
3. La somme de deux entiers naturels x et y , avec $0 < x \leq y$, est égale à leur produit.
Combien y a-t-il de solutions distinctes (x, y) ?

B

La somme de trois entiers naturels x , y et z , avec $0 < x \leq y \leq z$, est égale à leur produit.

1. Montrer que $xy \leq 3$.
2. Combien y a-t-il de solutions distinctes (x, y, z) ?

C

La somme de cinq entiers naturels x , y , z , u et v , avec $0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v$, est égale à leur produit.

Combien y a-t-il de solutions possibles (x, y, z, u, v) ?

Éléments de solution

- A. 1. Trivialement 2 et 2.

2. $xy = 2009$ implique que x et y sont des entiers impairs. Mais alors $x + y$ est un entier pair et par conséquent $x + y \neq 2009$. On ne peut pas trouver deux entiers naturels dont la somme et le produit soient égaux à 2009.
3. Soit x et y deux entiers naturels non nuls tels que $0 < x \leq y$.
 Si $x \leq y$ alors $x + y \leq 2y$. Et comme $x + y = xy$ alors $xy \leq 2y$ alors $x \leq 2$ puisque y n'est pas nul.
 Soit $x = 1$. Alors $x + y = xy$ s'écrit $1 + y = y$. On ne peut pas trouver y .
 Soit $x = 2$. Alors $x + y = xy$ s'écrit $2 + y = 2y$ donc $y = 2$.
Le seul couple possible est (2, 2)
- B. 1. Soit x , y , et z trois entiers naturels non nuls tels que $0 < x \leq y \leq z$.
 Si $x \leq y \leq z$ alors $x + y + z \leq 3z$. Et comme $x + y + z = xyz$ alors $xy \leq 3$ car $z \neq 0$.
2. $xy \leq 3$ donne :
 Soit $x = y = 1$. Alors $x + y + z = xyz$ s'écrit $2 + z = z$. On ne peut pas trouver z .
 Soit $x = 1$ et $y = 2$. Alors $x + y + z = xyz$ s'écrit $3 + z = 2z$. Donc $z = 3$.
 Soit $x = 1$ et $y = 3$. Alors $x + y + z = xyz$ s'écrit $4 + z = 3z$. On ne peut pas trouver $z \geq y$.
Le seul triplet possible est (1, 2, 3).
- C. 1. Soit x , y , z , u et v cinq entiers naturels non nuls tels que $0 < x \leq y \leq z \leq u \leq v$.
 Un raisonnement analogue à celui utilisé dans la question B conduit à :
 Si $x \leq y \leq z \leq u \leq v$ alors $x + y + z + u + v \leq 5v$.
 Et comme $x + y + z + u + v = xyzuv$ alors $xyzuv \leq 5v$, alors $xyzv \leq 5$ puisque v n'est pas nul.
 On en déduit déjà que $x = y = 1$. Examinons les différents cas possibles.
 Soit $z = 1$ et $u = 1$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $4 + v = v$.
 On ne peut pas trouver v .
 Soit $z = 1$ et $u = 2$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $5 + v = 2v$ et $v = 5$.
 Soit $z = 1$ et $u = 3$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $6 + v = 3v$ et $v = 3$.
 Soit $z = 1$ et $u = 4$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $7 + v = 4v$.
 On ne peut pas trouver v .
 Soit $z = 1$ et $u = 5$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $8 + v = 5v$ et $v = 2$.
 Soit $z = 2$ et $u = 2$. Alors $x + y + z + u + v = xyzuv$ s'écrit $6 + v = 4v$ et $v = 2$.
Les seuls quintuplets possibles sont
(1, 1, 1, 2, 5), (1, 1, 1, 3, 3), (1, 1, 2, 2, 2)

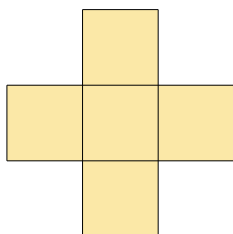
Exercice n° 2

Enoncé

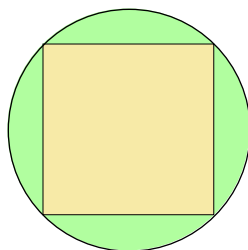
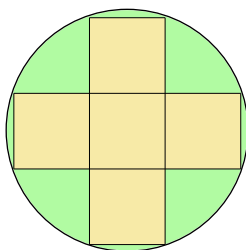
La croix, le carré, l'hexagone et l'hexamier

Les candidats des séries L, ES, STI, STL, STG et ST2S ne traiteront que la question 1.

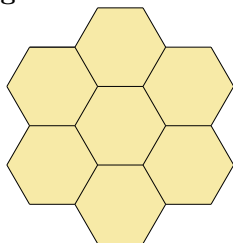
1. Croix et carré :



Une croix est dans cet exercice une figure géométrique formée de cinq carrés de même dimension et disposés comme l'indique la figure ci-contre. Soit deux cercles C et C' de même rayon. Dans le premier on inscrit une croix, dans le second un carré. Comparer les aires du carré et de la croix.

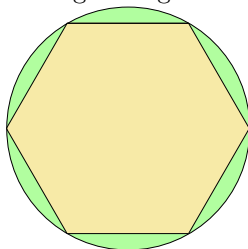
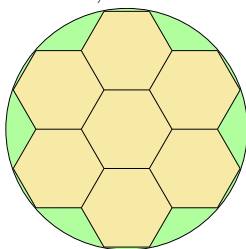


2. Hexagone et hexamier :



Un hexamier est une figure géométrique formée de sept hexagones réguliers de même dimension et disposés comme l'indique la figure ci-contre.

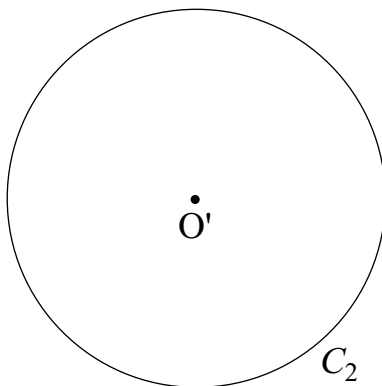
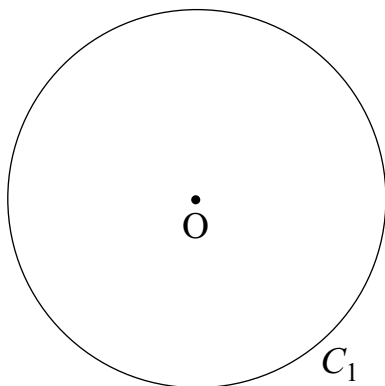
Soit deux cercles C et C' de même rayon. Dans le premier on inscrit un hexamier, dans le second un hexagone régulier.



Comparer les aires de l'hexamier et de l'hexagone.

3. Ci-dessous, vous avez deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

À l'aide seulement d'une règle non graduée et d'un compas inscrire une croix dans $\mathcal{C}_1$ et un hexamier dans $\mathcal{C}_2$. Vous donnerez en quelques lignes, les éléments de constructions que vous utilisez : on suppose connu le tracé d'une perpendiculaire et d'une parallèle à une droite ainsi que la construction d'un carré.



Eléments de solution

1. Solution algébrique :

Soit r le rayon commun des deux cercles.

L'aire du carré inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ est $A_1 = 2r^2$.

Soit a la longueur commune des côtés des carrés formant la croix.

A l'aide de Pythagore, on établit la relation suivante entre a et r :

$$\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{4} = r^2.$$

D'où $a^2 = \frac{2}{5}r^2$.

Et comme A_2 , l'aire de la croix vaut $5a^2$, nous obtenons : $A_2 = A_1 = 2r^2$.

2. Soit r le rayon commun des deux cercles.

L'aire de l'hexagone régulier inscrit dans $\mathcal{C}$ est $A_3 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$.

Soit b la longueur commune des côtés des hexagones formant l'hexamier.

On obtient, toujours à l'aide de Pythagore, la relation suivante entre b et r :

$$\frac{25}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = r^2$$

D'où $b^2 = \frac{1}{7}r^2$.

L'aire de l'hexagone intervenant dans la construction d'un hexamier est donc :

$$A = 3\frac{\sqrt{3}}{2}b^2 = 3\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{7}r^2.$$

Et l'aire A_4 de l'hexamier vaut donc :

$$A_4 = 7 \times A = 7 \times 3\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{7}r^2 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}r^2 = A_3.$$

3. Constructions.

Le principe consiste à s'affranchir de la contrainte « inscription dans un cercle donné », de construire ce que l'on sait faire, une croix et un hexamier avec pour centre de construction le centre du cercle correspondant.

Ceci fait, on se ramène à la figure demandée à l'aide d'une homothétie, ce que l'on sait faire avec les instruments autorisés.