

CAEN

Exercice n° 1 (Série S)

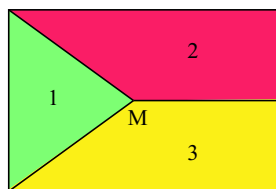
Enoncé

Les drapeaux

On considère pour chaque question un drapeau de dimensions 120×80 cm.

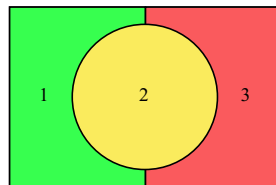
1. Un nouveau pays veut créer son drapeau (ci-contre). Ses dirigeants souhaitent que les trois « valeurs » de ce nouvel état y soient symbolisées de la même façon, par trois parties de même aire.

Quelle(s) est (sont) la (les) position(s) possible(s) du point M, point commun aux trois parties, pour que le côté commun aux parties 2 et 3 soit parallèle aux deux autres côtés ?

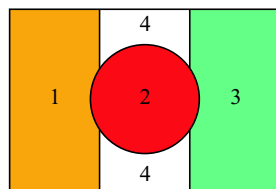


2. Un autre nouveau pays veut aussi créer son drapeau (ci-contre). Ses dirigeants souhaitent aussi que les trois « valeurs » de ce nouvel état y soient symbolisées de la même façon, par trois parties de même aire.

Peut-on avoir les 3 aires égales ?



3. Un troisième nouveau pays veut créer aussi son drapeau (ci-contre). Ses dirigeants souhaitent que les quatre « valeurs » de ce nouvel état y soient symbolisées de la même façon, par quatre parties de même aire.



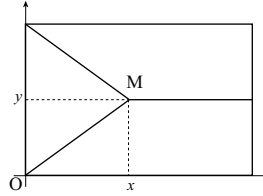
1. Peut-on avoir les 4 aires égales si les trois bandes verticales sont de même largeur ?
2. Peut-on avoir les 4 aires égales si l'on fait varier la largeur de la bande centrale ?

Indication : on pourra utiliser le fait que l'aire d'un secteur angulaire de α radian est égale à $\frac{\alpha}{2} \times r^2$.

Eléments de solution

1- Considérons un repère orthonormé d'origine O, dans lequel M aura pour coordonnées (x, y) .

Soient A_1 , A_2 et A_3 les aires respectives des parties 1, 2 et 3.



$$A_1 = 40x;$$

$$A_2 = \frac{(120 + 120 - x) \times (80 - y)}{2};$$

$$A_3 = \frac{120 + 120 - x}{2} \times y.$$

De $A_2 = A_3$, il résulte que $80 - y = 40$ d'où $y = 40$.

De $A_1 = A_3$, il résulte que $2x = 240 - x$ d'où $x = 80$.

Le point M est unique et a pour coordonnées $(80, 40)$ dans le repère ci-dessus.

2- Soient A_1 , A_2 et A_3 les aires respectives des parties 1, 2 et 3.

Puisque les trois parties ont la même aire :

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{80 \times 120}{3} = 3\,200 \text{ cm}^2.$$

Donc le disque est bien contenu dans le drapeau. Quant aux parties 1 et 3, leur aire est bien $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ de l'aire du drapeau.

3- a) Soient A_1 , A_2 , A_3 et A_4 les aires respectives des parties 1, 2, 3 et 4.

Puisque les quatre parties ont la même aire :

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \frac{80 \times 120}{4} = 2\,400 \text{ cm}^2.$$

En particulier $A_2 = \pi r^2 = 2\,400$ où r est le rayon du disque central, donc :

$$r = \sqrt{\frac{2400}{\pi}} = 20\sqrt{\frac{6}{\pi}} \approx 27,6 < \frac{80}{2}$$

Ce qui convient.

Calcul de A_1 :

On calcule d'abord l'aire B de l'intersection du disque et de la bande verticale de gauche.

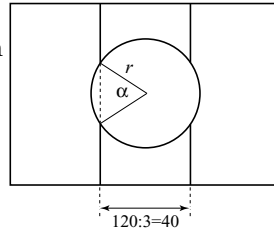
$$\cos \frac{\alpha}{2} = \cos^2 \left(\frac{20}{r} \right)$$

$$\text{d'où } \alpha = 2 \cos^{-1} \left(\frac{20}{r} \right) = 2 \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{\pi}{6}} \right).$$

$$B = \frac{\alpha}{2} r^2 - \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \times r^2 = \frac{\alpha}{2} r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$$

Donc

$$A_1 = 40 \times 80 - \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha)$$



$$= 3200 - \frac{1200}{\pi} \left(2 \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{\pi}{6}} \right) - \sin \left(2 \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{\pi}{6}} \right) \right) \right) \\ \approx 3000 \text{ cm}^2 \neq 2400 \text{ cm}^2 \text{ donc la réponse est NON.}$$

3- b) Il résulte du calcul précédent que les deux bandes 1 et 3 sont trop larges si l'on choisit une largeur ℓ de la bande centrale supérieure à 40.

Les quatre aires $(120 - \ell) \times 40$, πr^2 , $(120 - \ell) \times 40$ et $\ell \times 80 - \pi r^2$ sont égales à 2400 si $\ell = 60$ et $\pi r^2 = 2400$.

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Problème du cadre

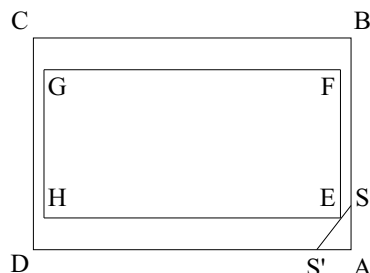
On dispose d'un cadre dont le bord extérieur est un rectangle ABCD de dimensions 30 cm et 20 cm. Le bord intérieur est aussi un rectangle EFGH.

Les deux bandes du cadre suivant les longueurs sont identiques. Il en est de même des bandes suivant les largeurs.

La bande suivant la largeur est large de 1 cm. La bande suivant les longueurs est large de 3 cm.

On veut découper le coin A de ce cadre suivant la section [SS'].

1. Déterminer la longueur SS' de la section sachant que $AS = AS'$.
2. Calculer la longueur de la section SS' lorsque S est en B.
3. Même question lorsque S' est en D.
4. Calculer la longueur de la section lorsque $ES = ES'$.



Eléments de solution

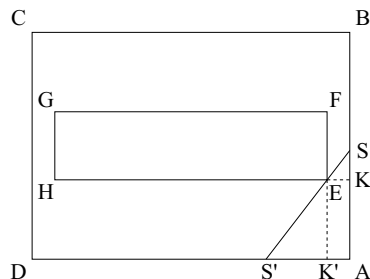
1. Déterminer la longueur SS' de la section sachant que $AS = AS'$.

Si $AS = AS'$, alors le triangle est isocèle rectangle en A.

Soit K le point d'intersection de (AB) et (EH). Alors $SK = EK = 1$ cm.

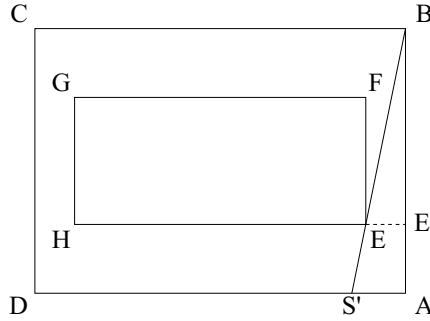
Soit K' le point d'intersection de (AD) et (EF). Alors $SK' = EK' = \sqrt{3}$ cm.

Ainsi



$$SS' = \sqrt{AS^2 + AS'^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} \approx 3,86 \text{ cm}$$

2. Calculer la longueur de la section SS' lorsque S est en B .



Soit E' le point d'intersection de (HE) et (AB) . On a

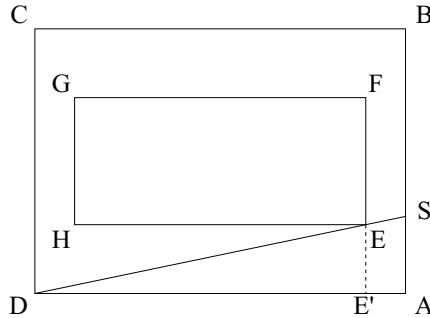
$$\tan \widehat{EBE'} = \frac{EE'}{BE'} = \frac{1}{20 - \sqrt{3}} = \frac{AS'}{AB} = \frac{AS'}{20}.$$

$$\text{Alors } AS' = \frac{20}{20 - \sqrt{3}}.$$

Le théorème de Pythagore donne ensuite :

$$SS' = BS' = \sqrt{20^2 + \left(\frac{20}{20 - \sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{161600 - 16000\sqrt{3}}}{20 - \sqrt{3}} = 20 \text{ cm.}$$

3. Même question lorsque S' est en D .



Soit E' le point d'intersection de (FE) et (AD) . On a :

$$\tan \widehat{EDE'} = \frac{EE'}{DE'} = \frac{\sqrt{3}}{30 - 1} = \frac{\sqrt{3}}{29} = \frac{AS}{AD} = \frac{AS}{30}$$

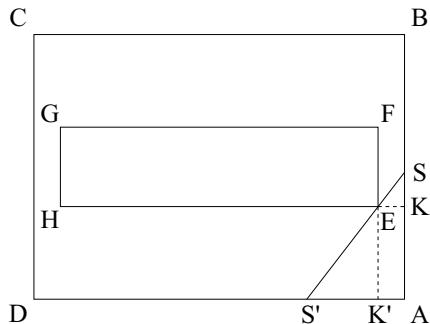
$$\text{Alors } AS = \frac{30\sqrt{3}}{29}.$$

Le théorème de Pythagore donne ensuite :

$$SS' = DS = \sqrt{30^2 + \left(\frac{30\sqrt{3}}{29}\right)^2} = \sqrt{\frac{327600}{361}} \approx 30,12 \text{ cm.}$$

4. Calculer la longueur de la section lorsque $ES = ES'$.

Soit K le point d'intersection de (AB) et (EH) et K' le point d'intersection de (AD) et (EF). On note $\theta = \widehat{ESK}$.



On a $\sin \widehat{ESK} = \sin \theta = \frac{EK}{SE} = \frac{1}{SE}$, alors $SE = \frac{1}{\sin \theta}$.

De même $\sin \widehat{ES'K'} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta = \frac{EK'}{ES'}$, alors $ES' = \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta}$.

Si $ES = ES'$, alors

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta} \text{ et donc } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ alors } \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Ainsi : $SS' = 2SE = \frac{2}{\sin \theta} = 4 \text{ cm.}$

Exercice n° 3 (Toutes séries sauf S)

Enoncé

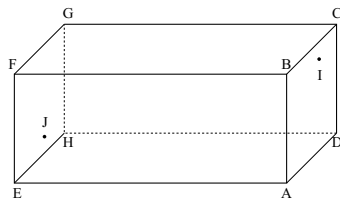
Le problème de la fourmi ²

Dans un hangar ABCDEFGH qui a la forme d'un pavé droit avec $AE = 30 \text{ m}$, $AD = 12 \text{ m}$ et $AB = 12 \text{ m}$ se trouve une fourmi à la position I qui veut se rendre à la position J.

Le point I est sur la médiatrice du segment [BC], à 1 mètre de la droite (BC).

Le point J est sur la médiatrice du segment [EH] à 1 mètre de la droite (EH).

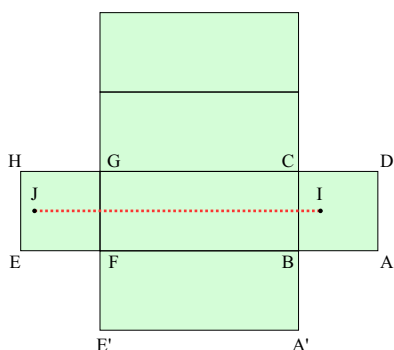
Déterminer la longueur du chemin le plus court que doit suivre la fourmi, en restant en contact avec les flancs du hangar.



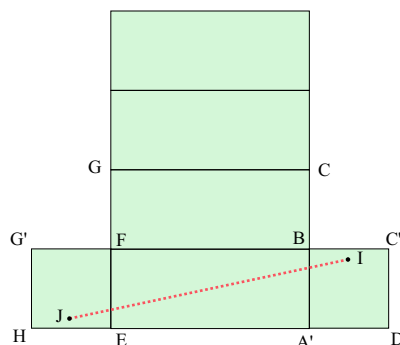
²A partir du livre Maths puzzle by Peggy Alder and Irving Adler. Editeur : Watts.

Eléments de solution

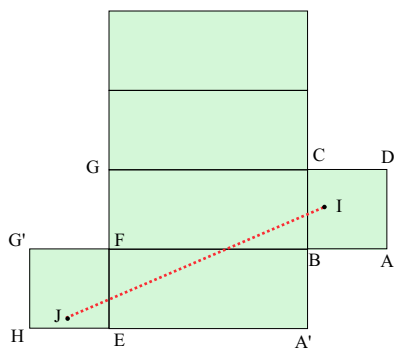
Sachant que, dans le plan, la droite est le chemin le plus court entre deux points, la méthode pour résoudre le problème de la fourmi est de « tout mettre à plat » en réalisant un patron du pavé droit. Il y a plusieurs façons de réaliser ce patron. Voici les trois possibilités potentiellement intéressantes pour le problème de la fourmi.



Première possibilité :
 $IJ = 12 + 30 = 42$ mètres.



Deuxième possibilité :
 $IJ = \sqrt{42^2 + 10^2} \approx 43,17$ mètres
 (d'après le théorème de Pythagore).



Deuxième possibilité :
 $IJ = \sqrt{37^2 + 17^2} \approx 40,72$ mètres
 (d'après le théorème de Pythagore).

C'est ce troisième patron du pavé qui permet donc de minimiser le trajet de la fourmi que l'on peut visualiser ci-dessous.

