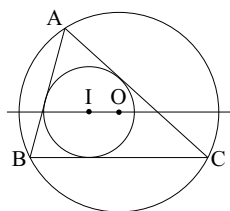


BORDEAUX

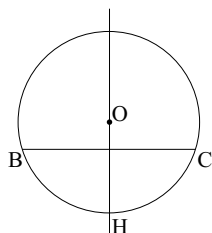
Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

Triangles olympiadiques



On appelle triangle olympiadique de sommet A, un triangle tel que, si O et I désignent respectivement les centres des cercles circonscrit et inscrit au triangle ABC, alors ces deux points sont distincts et la droite (OI) est parallèle à (BC).



1. (OH) désignant la médiatrice du segment [BC], reproduire la figure ci-contre et construire le point A tel que le triangle ABC soit olympiadique de sommet A.

2. Cette construction est-elle toujours réalisable? En déduire une condition sur l'angle BAC pour qu'il existe un triangle olympiadique de sommet A.

Eléments de solution (Abderrahim Ouardini)

1. a) **Analyse du problème.**

Supposons que le problème est possible et admet une solution, on

a :

$$\widehat{CIH} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} \text{ (angle extérieur au triangle ACI)}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{HCI} &= \widehat{HCB} + \widehat{BCI} \\ &= \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{(puisque } \widehat{HCB} = \widehat{HAB} = \widehat{HAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \text{)} \text{ donc } \widehat{CIH} = \widehat{HCI}.$$

Ainsi le triangle HIC est isocèle en H et $HC = HI$.

Remarquons que si le point A est une solution du problème, alors son symétrique par rapport à la droite (OH) l'est aussi. Donc on va se placer dans le demi-plan (II) limité par la droite (OH) qui ne contient pas le point C.

- b) Dans le demi-plan (II) traçons le cercle de centre H et de rayon HB , son intersection avec la parallèle menée par le point O à la droite (BC) donne le point I; et enfin la droite (HI) recoupe le cercle (Γ) au point voulu.

c) **Justification.**

Il est clair que la droite (IH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

On a $\widehat{IBA} = \widehat{BIH} - \frac{\widehat{bac}}{2}$ (angle extérieur au triangle ABI), le triangle

HIB est isocèle en H, donc $\widehat{BIH} = \widehat{IBH}$, et comme $\frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{CBH}$ (angles interceptant le même arc) alors :

$$\widehat{IBA} = \widehat{BIH} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{IBH} - \widehat{CBH} = \widehat{IBC},$$

(la demi-droite [BC) est à l'extérieure de l'angle $\widehat{IBH}$) et ceci montre que la droite (IB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Donc le point est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

2. La construction décrite à la question 1 n'est possible que lorsque $R\sqrt{2} > BH > R$ où R désigne le rayon du cercle Γ .

Remarquons que l'inégalité $R\sqrt{2} > BH$ est toujours vérifiée puisque le segment [BH] est contenu dans le carré construit sur le côté [OH] dans le demi-plan (II).

Le théorème Al-Kashi, appliqué au triangle OHB, donne :

$$\begin{aligned} BH^2 &= OB^2 + OH^2 - 2OB.OH.\cos\widehat{BOH} \\ &= 2R^2 - 2R^2.\cos\widehat{BOH} \end{aligned}$$

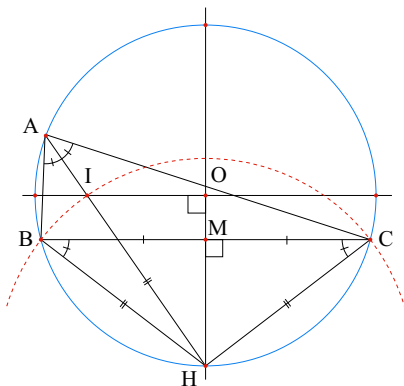
On a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} BH > R &\Leftrightarrow 2R^2 \left(1 - \cos\widehat{BOH}\right) > R^2 \\ &\Leftrightarrow 1 - \cos\widehat{BOH} > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > \cos\widehat{BOH}. \end{aligned}$$

On a alors $\widehat{BOH} > 60^\circ$, ou encore $\widehat{BAC} > 60^\circ$

Donc une condition nécessaire et suffisante sur l'angle α pour qu'il existe

un triangle olympiadique ABC de sommet A tel que $\widehat{BAC} = \alpha$ est $\alpha > 60^\circ$.

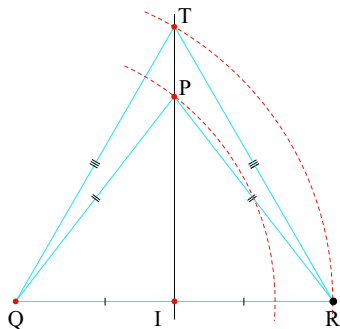


Remarque. On peut obtenir le résultat de la discussion ($\alpha > 60^\circ$) en utilisant le résultat suivant :

Soit PQR un triangle isocèle en P , si $QR > PQ$, alors $\widehat{QPR} > 60^\circ$.

Preuve

Méthode 1



Plaçons le point T sur la demi-droite $[IP)$ tel que $QT = QR$ (ce qui est possible puisque $QR > PQ$).

On a $\widehat{QPI} = \widehat{PTQ} + \widehat{PQT} = 30^\circ + \widehat{PQT}$ (angle extérieur au triangle PQT), donc $\widehat{QPI} > 30^\circ$, et par suite : $\widehat{QPR} = 2 \times \widehat{QPI} > 2 \times 30^\circ = 60^\circ$.

Méthode 2

Dans le triangle rectangle PQI , on a $\sin \widehat{QPI} = \frac{QI}{QP} = \frac{1}{2} \times \frac{QR}{QP} > \frac{1}{2}$,
puisque'il s'agit d'un angle aigu, on obtient $\widehat{QPI} > 30^\circ$.

Prolongement(A.O.)

1. Autre méthode

(une condition nécessaire et suffisante sur l'angle α)

Soit M le milieu du côté $[BC]$, dans le triangle rectangle BOM . On a : $OM = R \cos \widehat{BAC}$. Comme le triangle ABC est olympiadique de sommet A , alors $OM = r$. Donc $\frac{r}{R} = \cos \widehat{BAC}$.

La relation d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$ nous permet de déduire l'inégalité d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr > 0$ (inégalité stricte puisque les points O et I sont distincts), ou encore $\frac{r}{R} < \frac{1}{2}$, donc $\cos \widehat{BAC} < \frac{1}{2}$.

2. Inégalité dans un triangle

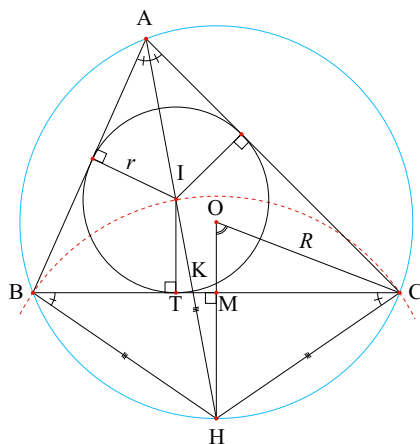
On désigne respectivement par r , R les mesures du rayon du cercle inscrit, circonscrit dans le triangle ABC et par a la mesure du côté $[BC]$.

On a l'inégalité suivante :

$$\frac{4ar}{4r^2 + a^2} \leq \cos \frac{\alpha}{2}$$

l'égalité a lieu si et seulement si le triangle ABC est isocèle en A .

Preuve de l'inégalité



Partons des deux inégalités $HM \leq HK$ et $IT \leq IK$, et par somme, on obtient : $r + HM \leq IH$, comme $IH = HC$ (question 1.a) alors $r + HM \leq HC$.

On désigne par α la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Dans le triangle HCM , on a :

$$HM = \frac{a}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad HC = \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

donc :

$$r + \frac{a}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

ou encore :

$$r \leq \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \tan \frac{\alpha}{2} \right).$$

Comme $o < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, alors :

$$\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{\cos \frac{\alpha}{2}},$$

on a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} r \leq \frac{a}{21} \left(\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} - \tan \frac{\alpha}{2} \right) &\Leftrightarrow \frac{2r}{a} \cos \frac{\alpha}{2} \leq 1 - \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 1 - \frac{2r}{a} \cos \frac{\alpha}{2}, \\ &\Leftrightarrow 1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq \left(1 - \frac{2r}{a} \cos \frac{\alpha}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

soit, après réduction, on obtient l'inégalité voulue.

L'égalité a lieu si et seulement si $HM = HK$ et $IT = IK$; ce qui entraîne que la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ est la médiatrice du côté $[BC]$, ou encore que le triangle ABC est isocèle en A .

3. Appliquons l'inégalité précédente à un triangle olympiadique ABC de sommet A . On a : $r = R \cos \alpha$ (propriété caractéristique d'un triangle olympiadique), et $a = 2R \sin \alpha$. Donc, d'après l'inégalité :

$$\frac{4ar}{4r^2 + a^2} \leq \cos \frac{\alpha}{2},$$

on obtient :

$$\frac{4ar}{4r^2 + a^2} = \frac{(4R \cos \alpha) \times (2R \sin \alpha)}{4(R \cos \alpha)^2 + (2R \sin \alpha)^2} \leq \cos \frac{\alpha}{2},$$

ou encore $\sin 2\alpha \leq \cos \frac{\alpha}{2}$.

Pour un triangle ABC olympiadique de sommet A , on a :

- a) L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

En effet, comme la droite (OI) est parallèle à (BC) , et que les points A et I sont situés du même côté de (BC) , alors ils en est de même pour les points A et O . Donc L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu.

- b) L'angle $\widehat{BAC}$ ne peut pas être droit.

En effet, dans le cas contraire, désignons respectivement par N , M et H les projections orthogonales du point I sur les côtés $[AB]$ $[AC]$ et $[BC]$. Il est clair que $IN = MA = IM = MC$, donc le triangle IMC serait rectangle isocèle en M , ce qui entraîne $\widehat{ICM} = \widehat{ICH} = \frac{\pi}{4}$, ce qui est absurde.

Résolution dans l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'inéquation $\sin 2\alpha \leq \cos \frac{\alpha}{2}$.
L'inéquation proposée est successivement équivalente à :

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha \leq \cos \frac{\alpha}{2} &\Leftrightarrow \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) \geq 0, \\ &\Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)\right) \sin \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \geq 0, \\ &\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{4}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{4}\right) \geq 0.\end{aligned}$$

On va envisager deux cas :

Premier cas :

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{4}\right) \geq 0, \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{4}\right) \geq 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, il existe deux entiers relatifs m et n tels que :

$$\begin{cases} 2m\pi \leq \frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{4} \leq (2m+1)\pi, \\ 2n\pi \leq \frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{4} \leq (2n+1)\pi. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{(8m+3)\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{(1-8m)\pi}{3}, \\ -\frac{(8n+3)\pi}{5} \leq \alpha \leq \frac{(1-8n)\pi}{5}. \end{cases}$$

Ce qui donne nécessairement $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{5}\right]$.

Deuxième cas :

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{4}\right) \leq 0, \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{4}\right) \leq 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, il existe deux entiers relatifs m et n tels que :

$$\begin{cases} (2m+1)\pi \leq \frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{4} \leq (2m+2)\pi, \\ (2n+1)\pi \leq \frac{\pi}{4} - \frac{5\alpha}{4} \leq (2n+2)\pi. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient :

$$\begin{cases} -\frac{(8m+7)\pi}{3} \leq \alpha \leq -\frac{(8m+3)\pi}{3}, \\ -\frac{(8n+7)\pi}{5} \leq \alpha \leq -\frac{(8n+3)\pi}{5}. \end{cases}$$

Ce qui donne $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

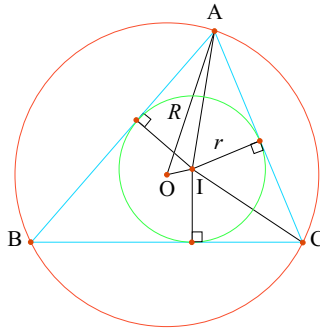
4. Inégalité d'Euler révisée.

On désigne respectivement par r , R les mesures des rayons du cercle inscrit et circonscrit dans un triangle ABC. On a la double inégalité :

$$\frac{r}{2R} \leq \min \left(\sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \right), \sin \frac{\beta}{2} \left(1 - \sin \frac{\beta}{2} \right), \sin \frac{\gamma}{2} \left(1 - \sin \frac{\gamma}{2} \right) \right) \leq \frac{1}{4}$$

avec $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{CBA}$, $\gamma = \widehat{ACB}$.

Preuve :



Par application du théorème d'Al-Kashi dans le triangle AOI, on a :

$$OI^2 = OA^2 + IA^2 - 2.OA.IA \cos \widehat{OAI},$$

(la relation d'Al-Kashi reste valable même si les points O, A, I sont alignés ou $O = I$)

comme $OA = R$ et $IA = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$,

alors $OI^2 = R^2 + \left(\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 - 2R\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \widehat{OAI}$, et par application de la relation d'Euler $OI^2 = R^2 - 2Rr$, on obtient :

$$OI^2 = R^2 - 2Rr = R^2 + \left(\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 - 2R\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \widehat{OAI},$$

soit

$$\left(\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2 + 2Rr = 2R\frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \widehat{OAI},$$

et, après réduction, on obtient (puisque $\cos \widehat{OAI} \leq 1$) :

$$\frac{r}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} + 2R = \frac{2R}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \widehat{OAI} \leq \frac{2R}{\sin \frac{\alpha}{2}},$$

la conclusion est immédiate.

On sait que pour tout réel t , on a $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$, en effet :

$$\frac{1}{4} - t(1-t) = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \geq 0.$$

D'après le résultat précédent, on a par exemple $\frac{r}{2R} \leq \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)$, donc

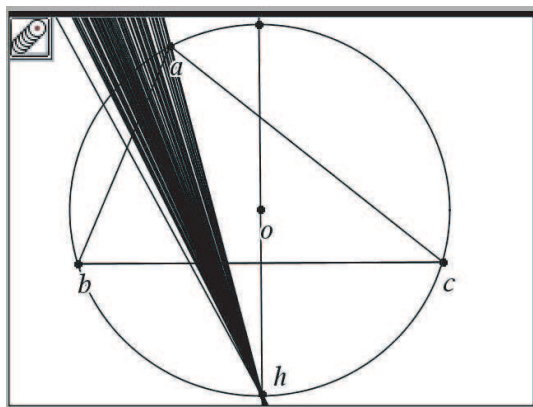
$$\frac{r}{2R} \leq \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{1}{4},$$

ce qui entraîne que $\frac{r}{R} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, et ceci achève notre preuve.

Avec une calculatrice par A. Guillemot

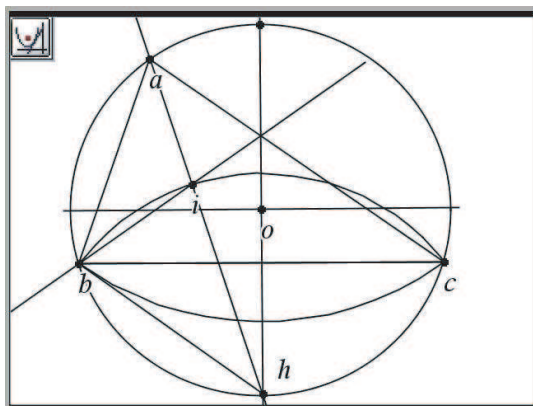
Approche calculatrice avec le module géométrie de NT-Spire.

A partir de la figure proposée, plaçons le point A sur le cercle et traçons la bissectrice de $\widehat{BAC}$



Si on déplace le point A sur le cercle, il semble que la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ passe par H.

A l'aide d'une deuxième bissectrice, plaçons le point I et traçons la parallèle à (BC) passant par O.

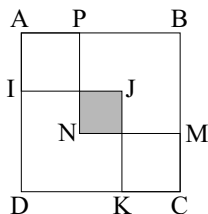
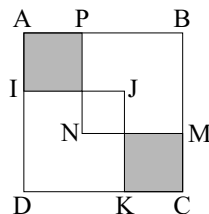


Si l'on demande le lieu de I, il semble être constitué de deux arcs de cercle de centre H et du point diamétralement opposé passant par B.

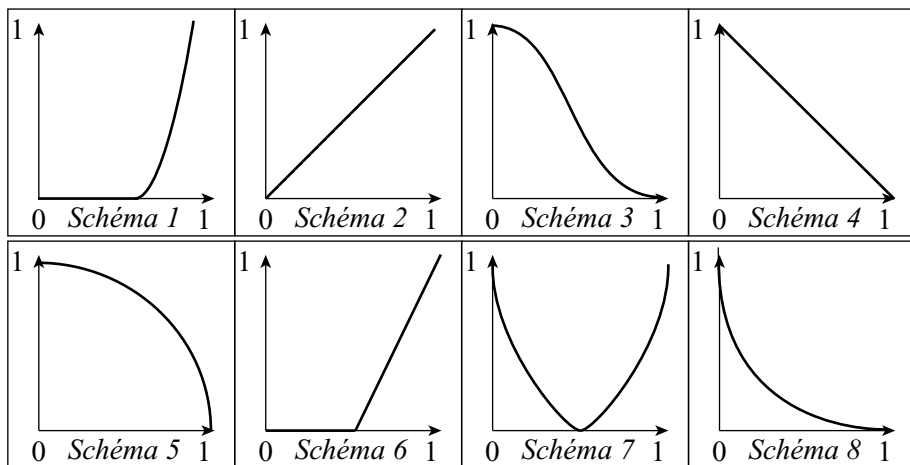
Démonstration des conjectures précédentes :

IJKD et PBMN sont deux carrés de côté x .

On désigne par $S_1(x)$ l'aire de la partie commune à ces deux carrés si elle existe, nulle si elle n'existe pas et par $S_2(x)$ l'aire de la partie extérieure à ces deux carrés et contenue dans ABCD.

Visualisation de $S_1(x)$ Visualisation de $S_2(x)$

1. Retrouver parmi les huit courbes suivantes celle qui représente S_1 et celle qui représente S_2 . On s'appliquera à justifier ses choix.



2. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x) = \frac{1}{4}$?

3. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x) = S_2(x)$?

4. Pour quelle valeur de x a-t-on $S_1(x) + S_2(x)$ minimum ? Quel est ce minimum ?

Eléments de solution

1. $S_1(x) = 0$, si $x < 0,5$ et $S_1(x) = (2x - 1)^2$ sinon
donc schéma 1 ; $S_2(x) = 1 - 2x^2$ si $x < 0,5$ et $S_2(x) = 2(x - 1)^2$ sinon
donc schéma 3.

2. $S_1(x) = \frac{1}{4}$ pour $2x - 1 = \frac{1}{2}$, donc pour $x = \frac{3}{4}$.

3. $S_1(x) = S_2(x)$ pour $(2x - 1)^2 = 2(x - 1)^2$ donc pour $2x^2 = 1$ donc pour
 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $S_1(x) + S_2(x) = 1 - 2x^2$ si $x < 0,5$ et $S_1(x) + S_2(x) = (2x-1) + 2(x-1)^2 = 6x^2 - 8x + 3$ sinon.

Le minimum est pour $x = \frac{2}{3}$, il est égal à $\frac{1}{3}$.

Exercice n° 3 (Toutes séries)

Enoncé

Carrés magiques multiplicatifs

a, b, c, d, e, f, g, h et i étant des entiers naturels n'ayant aucun diviseur

autre que 1 en commun, on dit que le tableau $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un carré magique

multiplicatif (CMM) de produit P si et seulement si le produit des entiers de chacune des lignes, le produit des entiers de chacune des colonnes et celui des entiers de chacune des deux diagonales est égal à P .

1. Compléter les deux CMM suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \\ 3 & 4 & \cdot \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & \cdot \\ 2^8 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2^6 & \cdot \end{pmatrix}$$

2. Montrer que si $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est un CMM de produit P alors $e^3 = P$. Ce résultat, même non démontré peut être utilisé par la suite.
3. Construire un CMM utilisant tous les diviseurs de 100.
4. Montrer que si e est un nombre premier, alors il n'y a que quatre carrés magiques possibles.
5. Construire un carré magique de produit 27 000 dont tous les termes sont différents.

Eléments de solution(A.O.)

1. a) Cherchons les CMM de la forme $\begin{pmatrix} 2 & 9 & p \\ q & r & 1 \\ 3 & 4 & s \end{pmatrix}$ dont on vérifie qu'il est bien magique.

Les relations $18p = ps$ et $qr = 6q$ donnent $s = 18$ et $r = 6$.

Les relations $36r = 3rp$ et $qr = 36r$ donnent $p = 12$ et $q = 36$; _D'où

le CMM cherché $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 12 \\ 36 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 18 \end{pmatrix}$

b) Cherchons les CMM de la forme : $\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & p \\ 2^8 & q & r \\ s & 2^6 & t \end{pmatrix}$

Les relations $2^6 st = 2^{11} s$ et $2^8 qr = 2^8 q$ donnent $t = 2$ et $r = 1$.

Les relations $\begin{cases} 2^3 qr = pqs \\ 2^5 p = pqs \\ 2^6 st = pqs \end{cases}$ donnent $\begin{cases} ps = 2^8 \\ qs = 2^5 \\ pq = 2^{11} \end{cases}$

D'où le CMM cherché : $\begin{pmatrix} 2^3 & 2^2 & 2^7 \\ 2^8 & 2^4 & 1 \\ 2 & 2^6 & 2^5 \end{pmatrix}$

Remarque : Après avoir justifié que les nombres p, q, r, s et t sont des puissances de 2, notre problème se ramène à la recherche d'un carré magique additif.

2. On a : $(aei)(gch)(beh)(def) = P^4 = abcdefghe^3 = P^3 e^3$. Donc $e^3 = P$.

3. L'ensemble des diviseurs de 100 est $\{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$. le produit de tous les diviseurs de 100 est 10^9 , donc $P^3 = 10^3$; Donc $P = 10^3$,

et le nombre 10 se trouve au centre du CMM. D'où $\begin{pmatrix} 2 & 100 & 5 \\ 25 & 10 & 4 \\ 20 & 1 & 50 \end{pmatrix}$.

4. En remarquant que l'équation d'inconnue le couple (x, y) (avec $x \neq y$) $xye = e^3$ a pour solution dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ $(1, e^2), (e^2, 1)$. D'où les quatre CMM :

$$\begin{pmatrix} e & e^2 & 1 \\ 1 & e & e^2 \\ e^2 & 1 & e \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e^2 & 1 & e \\ 1 & e & e^2 \\ e & e^2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & e^2 & e \\ e^2 & e & 1 \\ e & 1 & e^2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e & 1 & e^2 \\ e^2 & e & 1 \\ 1 & e^2 & e \end{pmatrix}.$$

5. Remarquons que $27\,000 = 30^3$, donc d'après le résultat de la question 2, le nombre 30 va se trouver au centre du CMM, comme $30 = 2 \times 3 \times 5$, alors, d'après la question 4, il existe trois CMM de centre 2, 3 et 5, à savoir

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 5 & 1 & 25 \\ 25 & 5 & 1 \\ 1 & 25 & 5 \end{pmatrix}$$

La multiplication terme à terme de ces trois CMM donne :

$$\begin{pmatrix} 90 & 1 & 300 \\ 100 & 30 & 9 \\ 3 & 900 & 10 \end{pmatrix}.$$

qui est un CMM solution du problème.

Prolongements (A.O.)

La proposition suivante donne une généralisation de la question 3.

Proposition 1. Pour que tous les diviseurs d'un entier naturel n (≥ 2) soient les termes d'un carré magique multiplicatif d'ordre 3, il faut et il suffit que n soit de la forme p^2q^2 ou p^8 , avec p et q des nombres premiers supérieurs ou égaux à 2.

Preuve de la proposition 1.

Remarquons d'abord que l'entier n doit avoir exactement 9 diviseurs, si $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ est la décomposition de n en facteurs premiers, alors le nombre de diviseurs de n est $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.

Quitte à changer l'indexation des $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$ de l'égalité $(\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1) = 9$, on tire :

$$\begin{cases} \alpha_1 + 1 = 3 \\ \alpha_2 + 1 = 3 \\ \alpha_i + 1 = 1, \text{ pour } 3 \leq i \leq k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha_1 + 1 = 9 \\ \alpha_i + 1 = 1, \text{ pour } 2 \leq i \leq k \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_i = 0, \text{ pour } 3 \leq i \leq k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 8 \\ \alpha_i = 0, \text{ pour } 2 \leq i \leq k \end{cases}$$

Ainsi n a l'une des formes p^2q^2 ou p^8 , avec p et q des nombres premiers supérieurs ou égaux à 2. La vérification est immédiate.

Dans tout ce qui suit P désigne le produit du CMM.

- a) pour $n = p^2q^2$, le produit de tous les diviseurs de n est p^9q^9 , donc $P = \sqrt[3]{p^9q^9} = p^3q^3$. D'après le résultat de la question 2, le nombre qui se trouve au centre du CMM est pq , ainsi le CMM suivant :

$$\begin{pmatrix} p & q^2 & p^2q \\ p^2q^2 & pq & 1 \\ q & p^2 & pq^2 \end{pmatrix}.$$

répond à la question.

- b) Pour $n = p^8$, le produit de tous les diviseurs de n est $p^{1+\cdots+8} = p^{36}$, donc $P = \sqrt[3]{p^{36}} = p^{12}$, et le nombre qui se trouve au centre du CMM est p^4 . En s'inspirant du carré magique additif d'ordre 3 qui utilise tous les nombres 0, 1, ..., 8 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

on obtient le CMM suivant :

$$\begin{pmatrix} p & p^8 & p^3 \\ p^6 & p^4 & p^2 \\ p^5 & 1 & p^7 \end{pmatrix},$$

qui répond à la question.

Proposition 2. Soit n entier naturel ; pour qu'il existe au moins un carré magique multiplicatif d'ordre 3, de produit n^3 et dont tous les termes sont différents, il faut et il suffit que n ne soit pas de la forme p^5 , avec p un nombre premier supérieur ou égal à 2 et $s \in \{1, 2, 3\}$.

Preuve de la proposition 2

On va distinguer deux cas.

- a) $n = uv$, avec u et v des entiers premiers entre eux et supérieurs ou égaux à 2. Dans ce cas, le CMM suivant :

$$\begin{pmatrix} u & v^2 & u^2v \\ u^2v^2 & uv & 1 \\ v & u^2 & uv^2 \end{pmatrix},$$

vérifie les conditions demandées.

- b) $n = p^r$, avec p un nombre premier supérieur ou égal à 2 et r un entier naturel non nul.

Si $r \geq 4$, alors la multiplication de chaque terme du CMM suivant :

$$\begin{pmatrix} p & p^8 & p^3 \\ p^6 & p^4 & p^2 \\ p^5 & 1 & p^7 \end{pmatrix},$$

par le nombre p^{r-4} , donne

$$\begin{pmatrix} p^{r-3} & p^{r+4} & p^{r-1} \\ p^{r+2} & p^r & p^{r-2} \\ p^{r+1} & p^{r-4} & p^{r+3} \end{pmatrix}.$$

- c) D'après la question 4 du problème d'Olympiade, l'entier n ne peut être premier car, dans ce cas, le CMM correspondant a des termes non tous différents.

Les cas $n = p^2$ et $n = p^3$ correspondent respectivement à des CMM de centre p^2 et p^3 et de produits respectifs p^6 et p^9 .

Puisque tous les termes de ces deux CMM sont des puissances de p , alors notre problème se ramène à la recherche de deux carrés magiques additifs de centres 2 et 3 et ayant respectivement pour somme 6 et 9.

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 2 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & 3 & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Les décompositions $6 = 1 + \underline{2} + 3 = 0 + \underline{2} + 4$ et $9 = 1 + \underline{3} + 5 = 2 + \underline{3} + 4 = 6 + \underline{3} + 0$ montrent bien qu'il est impossible de construire de tels carrés magiques.