

AMIENS

Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

Les oiseaux

Initialement, n oiseaux se trouvent chacun au sommet d'un poteau, ces n sommets formant un polygone régulier à n côtés. Lorsqu'ils sont apeurés, ces oiseaux s'envolent. Puis après quelques temps, ils reviennent se poser sur les n poteaux, mais pas nécessairement à leurs positions initiales.

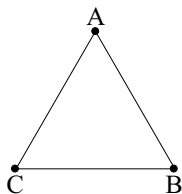
Deux oiseaux ne peuvent pas se poser sur le même poteau.

On dit que n oiseaux forment un groupe de « bons géomètres » lorsque, quelles que soient les positions avant et après l'envol, on peut trouver trois oiseaux (parmi les n) qui forment, avant et après l'envol, deux triangles

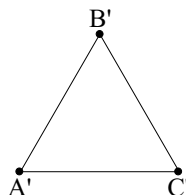
- soit tous deux rectangles ;
- soit tous deux acutangles (triangle dont les trois angles sont aigus).

Par exemple, pour $n = 3$, on peut schématiser le problème de la façon suivante. Appelons A l'oiseau posé en A avant l'envol. Sa position une fois reposé sera notée A'.

Avant l'envol, les oiseaux A, B, C forment un triangle acutangle.



Après l'envol, les oiseaux peuvent se reposer selon plusieurs combinaisons, par exemple :



Dans tous les cas, le triangle A'B'C' est un triangle acutangle.

Ainsi 3 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

On rappelle que tous les polygones sont inscrits dans un cercle.

1- Vérifier que 4 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

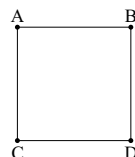
- 2- Pour $n = 5$, donner une position initiale et une position d'arrivée qui justifient que 5 oiseaux ne forment pas un groupe de « bons géomètres ».
- 3- Pour $n = 6$, les sommets des poteaux forment un hexagone régulier.
Montrer qu'il existe toujours 3 oiseaux qui, avant et après l'envol, forment un triangle rectangle.
Que peut-on conclure quant au fait que 6 oiseaux forment ou non un groupe de « bons géomètres » ?
- 4- Montrer que si n est pair, n oiseaux forment nécessairement un groupe de « bons géomètres ».

Eléments de solution

1) 4 oiseaux forment un carré avant l'envol. ABC est un triangle rectangle.

Quelles que soient les positions des oiseaux après l'envol, le triangle A'B'C' sera rectangle.

4 oiseaux forment donc un groupe de « bon géomètres ».

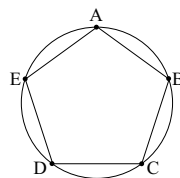


2) On considère le cercle circonscrit au pentagone régulier.

On remarque qu'il est impossible que 3 oiseaux forment un triangle rectangle car aucun des points A, B, C, D ou E n'est diamétralement opposé à un autre de ces points.

Deux oiseaux parmi trois sont nécessairement sur deux poteaux voisins.

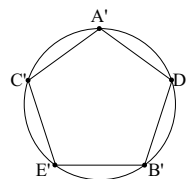
Les seuls triangles acutangles en position initiale sont ABD, BCE, CDA, DEB, EAC.



Les oiseaux A, B, C, D, E s'envolent...

S'ils se posent dans la position ci-contre, on observe que A'B'D', B'C'E', C'D'A', D'E'B' et E'A'C' sont tous des triangles avec un angle obtus.

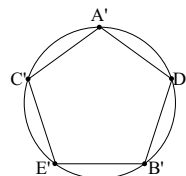
Un groupe de 5 oiseaux ne peut donc pas former un groupe de « bons géomètres ».



3) Les 6 oiseaux forment un hexagone régulier.

Considérons les oiseaux A et B diamétralement opposés sur le cercle circonscrit de l'hexagone.

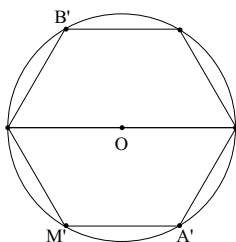
Quel que soit le troisième oiseau, noté M, le triangle ABM est rectangle.



Notons A', B' et M' les positions respectives des oiseaux A, B et M après leur envol.

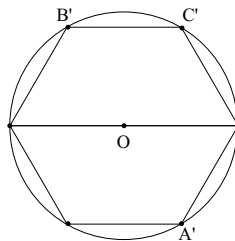
Soit A' et B' sont diamétralement opposés.

Alors, quelle que soit la position M' , les triangles ABM et $A'B'M'$ sont tous deux rectangles respectivement en M et M' .



Soit A' et B' ne sont pas diamétralement opposés.

Notons C' le point diamétralement opposé à A' . L'oiseau qui se repose en C' vient d'un point C (4 positions conviennent). Le triangle ABC est rectangle en C et le triangle $A'B'C'$ est rectangle en B' .



Dans les deux cas, on peut toujours trouver trois oiseaux qui forment, avant et après l'envol, un triangle rectangle. On en déduit donc que 6 oiseaux forment un groupe de « bons géomètres ».

4) n est pair donc chaque sommet du polygone admet un sommet diamétralement opposé sur le cercle circonscrit.

Considérons deux oiseaux A et B diamétralement opposés sur ce cercle.

Quel que soit le troisième oiseau, noté M , le triangle ABM est rectangle. Notons A' , B' et M' les positions respectives des oiseaux A , B et M après leur envol.

- Soit A' et B' sont diamétralement opposés.
Alors, quelle que soit la position M' , les triangles ABM et $A'B'M'$ sont tous les deux rectangles respectivement en M et M' .
- Soit A' et B' ne sont pas diamétralement opposés.
Notons C' le point diamétralement opposé à A' . L'oiseau qui se repose en C' vient d'un point C ($n - 2$ positions conviennent). Le triangle ABC est rectangle en C et le triangle $A'B'C'$ est rectangle en B' .

Conclusion : si n est pair, n oiseaux forment nécessairement un groupe de « bons géomètres ».

Exercice n° 2 (Série S)

Énoncé

Partage

L'intérieur d'un quadrilatère $ABCD$ est partagé en quatre triangles par ses diagonales.

Les centres des cercles circonscrits à ces quatre triangles forment un quadrilatère $STUV$.

1. Montrer que $STUV$ est toujours un parallélogramme.
2. Quelles propriétés doit avoir le quadrilatère $ABCD$ pour que $STUV$ soit un carré.

Eléments de solution

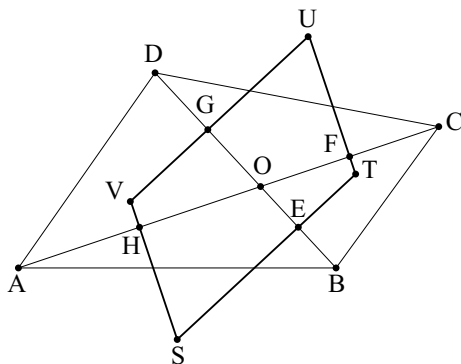
1) On raisonne sur la figure suivante :
S et T se trouvent sur la médiatrice de $[OB]$, donc (ST) est perpendiculaire à (OB) .

De même, (UV) est perpendiculaire à (OD) .

Et puisque D, O et B sont alignés, on obtient que (ST) est parallèle à (UV) .

De même, (TU) est parallèle à (VS) .

Le quadrilatère STUV est donc un parallélogramme.



2) Ensuite, grâce à la somme des angles dans le quadrilatère OETF, il vient que les angles $\widehat{EOF}$ et $\widehat{ETF}$ sont supplémentaires (car $\widehat{OET} = \widehat{OFT} = 90^\circ$).

Or $\widehat{EOF}$ et $\widehat{COD}$ sont aussi supplémentaires. Donc $\widehat{ETF} = \widehat{COD}$.

Pour que STUV soit un carré, il faut déjà avoir $\widehat{ETF} = 90^\circ$. Donc $\widehat{COD} = 90^\circ$: le quadrilatère ABCD doit avoir ses diagonales perpendiculaires.

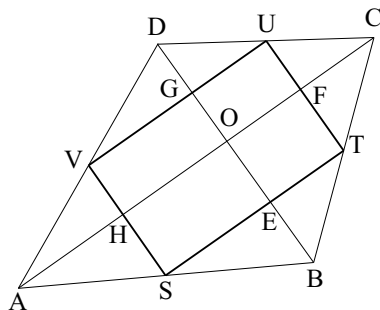
On obtient l'exemple ci-contre.

STUV est un rectangle mais pas encore un carré !

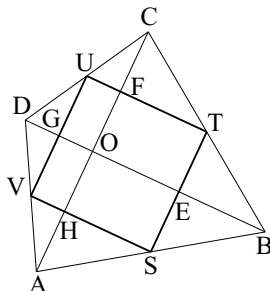
Les quatre triangles OAB, OBC, OCD et ODA sont rectangles en O. Et les cercles circonscrits sont centrés sur les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

Donc par application des propriétés de la droite des milieux, on obtient $ST = \frac{AC}{2}$ et $TU = \frac{BD}{2}$.

Pour que STUV soit un carré, il faut alors ajouter la contrainte $ST = TU$, ce qui donne $AC = BD$.



Pour que STUV soit un carré, la quadrilatère ABCD doit donc avoir ses diagonales perpendiculaires et de même longueur. Par exemple :



Exercice n° 3 (Séries STI/STL)

Enoncé

Fonction

Soit la fonction f définie sur $[1 ; +\infty]$ par

$$f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8}.$$

1. A l'aide de votre calculatrice, étudier le comportement de f sur l'intervalle $I_1 = [5 ; 10]$. Quelle conjecture vous suggère cette méthode ?
2. Démontrer cette conjecture (on pourra poser $x = u^2 + 1$, avec $u \geq 0$).
3. Donner une expression simplifiée de f sur les intervalles $I_2 = [1 ; 5]$ et $I_3 = [10 ; +\infty[$.

Eléments de solution

1) D'après la calculatrice, il semblerait que la fonction f soit constante sur $[5 ; 10]$, égale à 1.

2) Posons $x = u^2 + 1$ avec $u \geq 0$ (donc $\sqrt{u^2} = u$).

$$\begin{aligned} \text{On a } f(x) &= \sqrt{u^2 + 1 - 4\sqrt{u^2} + 3} + \sqrt{u^2 + 1 - 6\sqrt{u^2} + 8} \\ &= \sqrt{u^2 - 4u + 4} + \sqrt{u^2 - 6u + 9} \\ &= \sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(3-u)^2} \end{aligned}$$

Ensuite $x = u^2 + 1$, donc $u = \sqrt{x-1}$.

Puisque $5 \leq x \leq 10$, donc $2 \leq u \leq 3$. Donc $u-2 \geq 0$ et $3-u \geq 0$.

Alors $f(x) = (u-2) + (3-u) = 1$.

3) Le changement de variable $x = u^2 + 1$ est valable pour tout x supérieur à 1. Donc l'expression $f(x) = \sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(3-u)^2}$ est toujours valable.

Alors, si $1 \leq x \leq 5$, on a $0 \leq u \leq 2$. Donc $u-2 \leq 0$ et $3-u > 0$.

Ce qui donne : $f(x) = (2 - u) + (3 - u) = 5 - 2u = 5 - 2\sqrt{x - 1}$.

Et si $x \geq 10$, alors $u \geq 3$. Alors $u - 2 > 0$ et $3 - u \leq 0$.

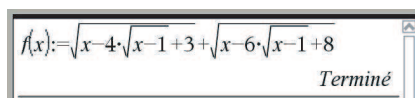
D'où $f(x) = (u - 2) + (u - 3) = 2u - 5 = 2\sqrt{x - 1} - 5$.

Avec une calculatrice par A. Guillemot

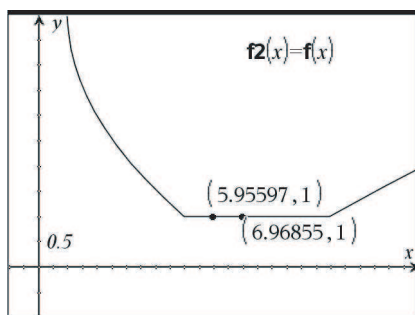
Utilisation d'une calculatrice formelle (ici TI-Nspire)

1. Commençons par entrer la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x - 1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x - 1} + 8}.$$



Représentons cette fonction dans un repère approprié.



Sur l'intervalle $[; 10]$, cette fonction semble être constante et valoir 1.

2. Utilisons le changement de variable suggéré par l'énoncé.

La calculatrice nous donne :

$f(x) _{x=u^2+1}$ and $u>0$	$ u-2 + u-3 $
© $5 \leq x \leq 10$ équivaut à $2 \leq u \leq 3$	
$ u-2 + u-3 $	$2 \leq u \leq 3$ 1
© $1 \leq x \leq 5$ équivaut à $0 \leq u \leq 2$	
$ u-2 + u-3 $	$0 \leq u \leq 2$ $5 - 2 \cdot u$
© $10 \leq x$ équivaut à $3 \leq u$	
$ u-2 + u-3 $	$3 \leq u$ $2 \cdot u - 5$
7/99	

Comme $u = \sqrt{x - 1}$, nous avons les simplifications suivantes de $f(x)$:

Pour $1 \leq x \leq 5$ $f(x) = 5 - 2\sqrt{x - 1}$

Pour $5 \leq x \leq 10$ $f(x) = 1$

Pour $x \geq 10$ $f(x) = 2\sqrt{x - 1} - 5$.

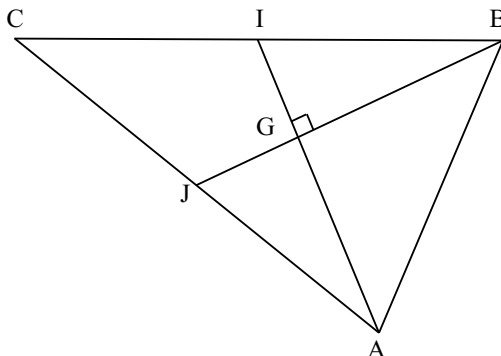
Exercice n° 4 (Séries STI/STL)

Enoncé

Triangle

Dans la figure suivante, le triangle ABC est tel que les médianes (AI) et (BJ) sont perpendiculaires.

Exprimer $CA^2 + CB^2$ en fonction de AB^2 .



Eléments de solution

On a $CA = 2JA$ et $CB = 2IB$. Et d'après le théorème de la droite des milieux, $IJ = \frac{AB}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } CA^2 + CB^2 &= 4(JA^2 + IB^2) = 4(JG^2 + GA^2 + IG^2 + GB^2) \\
 &= 4(JG^2 + IG^2 + GA^2 + GB^2) \\
 &= 4(IJ^2 + AB^2) = 4\left(\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + AB^2\right) = 5AB^2.
 \end{aligned}$$