

AIX-MARSEILLE

Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

L'épreuve de mathématiques

Une épreuve de mathématiques comporte quatre questions.

Pour chaque question, on obtient 0 point si la réponse est fausse ou 5 si la réponse est bonne.

Une des questions consiste à trouver l'aire totale des six faces d'un cube dont le côté s'exprime par un nombre entier de mètres.

Une autre question est la suivante :

« Le prix d'une chemise, vendue avant les soldes à 20€, baisse de 20%. Quel est son nouveaux prix ? »

Les réponses des élèves, sans unité, sont données par le tableau suivant :

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	16	10
Carina	12	24	12	14
Jérôme	12	24	16	18
Lucile	8	18	14	10
Myriam	16	26	16	14
Nicole	8	24	18	18
Saïda	8	20	16	10
Yves	16	24	18	10

Les notes 0 et 20 ont toutes les deux été attribuées.

Quelles sont les notes de chacun des élèves ?

Justifier les réponses données.

Éléments de solution

En ce qui concerne la surface totale des six faces du cube, les réponses possibles sont : $\{6 \times 1^2 ; 6 \times 2^2 ; 6 \times 3^2 ; \dots\}$

Parmi les réponses proposées, seul 24 convient puisque nous savons qu'un élève a eu 20.

La réponse à la question est 24.

La réponse à la question « Le prix d'une chemise vendue avant les soldes à 20€, baisse de 20%. Quel est son nouveau prix ? » est $20 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 16$.

Supposons que 16 soit la bonne réponse à la première question.

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	16	10
Carina	12	24	12	14
Jérôme	12	24	16	18
Lucile	8	18	14	10
Myriam	16	26	16	14
Nicole	8	24	18	18
Saïda	8	20	16	10
Yves	16	24	18	10

Dans ce cas, comme nous le voyons dans le tableau ci-dessus, seul Yves aurait 20, et en considérant les bonnes réponses d'Yves, personne n'aurait 0. Ce cas est exclu.

16 est donc la réponse à la troisième question.

	Réponse à la première question	Réponse à la deuxième question	Réponse à la troisième question	Réponse à la quatrième question
Alex	16	18	16	10
Carina	12	24	12	14
Jérôme	12	24	16	18
Lucile	8	18	14	10
Myriam	16	26	16	14
Nicole	8	24	18	18
Saïda	8	20	16	10
Yves	16	24	18	10

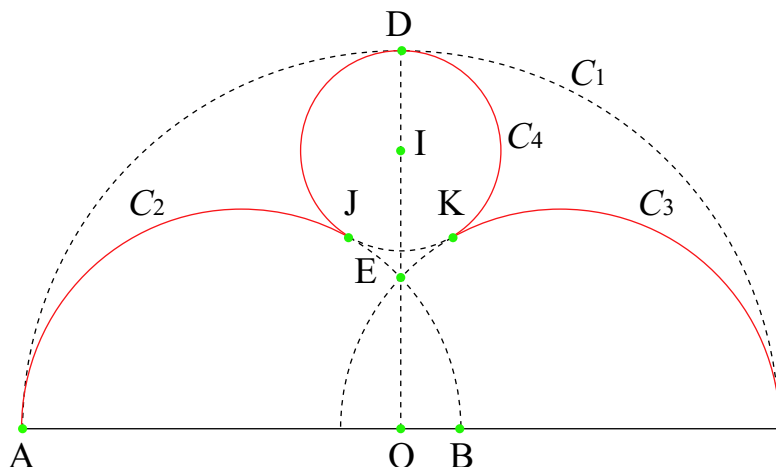
Jérôme est le seul à pouvoir avoir 20. En considérant les bonnes réponses de Jérôme, les autres notes en découlent : Lucile a eu 10, Ales, Myriam, Saïda et Yves ont eu 5, Carina et Nicole ont eu 10.

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Pour les besoins de son nouveau spectacle, le célèbre chanteur Johny Rockstar souhaite créer une scène de spectacle moderne.

Cette scène est représentée vue de dessus par le schéma suivant :



Le demi-cercle C_1 de centre O passant par le point A et le demi-cercle C_2 de diamètre $[AB]$ sont tangents en A.

La droite (OD) est axe de symétrie de la figure et le point D appartient à C_1 .

Le demi-cercle C_3 est le symétrique de C_2 par rapport à (OD) .

Le point E est le point d'intersection du segment $[OD]$ et de C_2 .

Des contraintes de construction imposent que $OA = 10$ m et $DE = 6$ m.

1 - Calculer le rayon de C_2 .

2 - C_4 est le cercle de centre I passant par le point D ;

C_4 est tangent à C_1 en D, tangent à C_2 en J, et tangent à C_3 en K.

Calculer le rayon de C_4 .

Propriété admise :

Si deux cercles de centre Ω et Ω' sont tangents en un point M, alors Ω , Ω' et M sont alignés.

Éléments de solution

1. $E \in [OD]$, donc $OE = OD - ED = 10 - 6 = 4$.

Dans le triangle AOE rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore :

$$AE^2 = AO^2 + OE^2$$

$$AE^2 = 10^2 + 4^2 = 116. \text{ On en déduit : } AE = \sqrt{116}$$

Le point E appartient à $\mathcal{C}_2$, donc le triangle ABE est rectangle en E.

Les triangles AOE et ABE sont deux triangles rectangles qui ont un angle aigu en commun. Ils sont semblables.

Dès lors $\frac{AO}{AE} = \frac{AE}{AB}$. Il vient $AB = \frac{AE^2}{AO} = 11,6$.

Le rayon de $\mathcal{C}_2$ a donc pour mesure 5,8 m.

2. Soit Ω le centre du cercle $\mathcal{C}_2$ et r le rayon de $\mathcal{C}_3$. $\Omega I = 5,8 + r$.

D'autre part, $I \in [OD]$, donc $OI = OD - ID = 10 - r$, et $\Omega \in [AO]$, donc $\Omega O = AO - A\Omega = 10 - 5,8 = 4,2$.

Dans le triangle ΩOI rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore : $\Omega I^2 = \Omega O^2 + OI^2$, $(5,8 + r)^2 = 4,2^2 + (10 - r)^2$.

En développant, il vient : $31,6 r = 84$, c'est-à-dire $r = \frac{210}{79}$ m.

Exercice n° 3 (Séries L-ES-STI S)

Enoncé

1. Question préliminaire :

À l'aide de la calculatrice, déterminer tous les entiers naturels a et b avec $a \leq b$ tels que : $a^2 + b^2 = 225$.

2. On cherche tous les triangles ABC rectangles en A, tels que $AB = 8$ et tels que BC et AC s'expriment à l'aide de nombres entiers.

(a) Calculer $BC^2 - AC^2$.

(b) Donner toutes les décompositions possibles de 64 sous la forme d'un produit de deux entiers naturels.

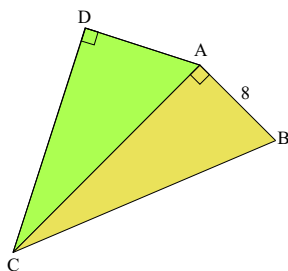
(c) y et z étant deux nombres entiers naturels, résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} z + y &= 16 \\ z - y &= 4 \end{cases}$$

En déduire un couple de valeurs possibles pour AC et BC.

(d) Peut-on trouver d'autres couples de valeurs pour AC et BC ?

3. On considère la figure suivante :



Déterminer les longueurs AC, BC, AD et CD sachant que ces longueurs s'expriment à l'aide de nombres entiers.

Éléments de solution

1. Question préliminaire

A l'aide de la calculatrice, $a = 9$ et $b = 12$ sont les seuls entiers naturels avec $a \leq b$ tels que $a^2 + b^2 = 225$.

2.a) Dans le triangle ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC^2$. D'où $BC^2 - AC^2 = AB^2 = 8^2 = 64$.

b) $64 = 1 \times 64$

$$64 = 2 \times 32$$

$$64 = 4 \times 16$$

$$64 = 8 \times 8.$$

c) Le couple $(y = 6 ; z = 10)$ est solution du système.

Dès lors, $64 = 16 \times 4 = (z + y)(z - y) = z^2 - y^2 = BC^2 - AC^2$.

Le couple $(AC = 6 ; BC = 10)$ répond donc à la question.

y et z ont joué le rôle de AC et BC .

Seules les valeurs entières positives de y et z nous intéressent.

Considérons les autres décompositions de 64 et étudions les systèmes associés compte tenu que $z + y \geq z - y$:

$$\begin{cases} z + y = 64 \\ z - y = 1 \end{cases} ; \begin{cases} z + y = 32 \\ z - y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} z + y = 8 \\ z - y = 8 \end{cases}$$

Seul le deuxième système permet d'obtenir des valeurs entières strictement positives. Le couple $(AC = 15 ; BC = 17)$ répond donc à la question.

Remarque : on a déterminé tous les couples $(AC ; BC)$ répondant à la question.

3. D'après ce qui précède, soit $AC = 6$ soit $AC = 15$.

Or il n'existe pas d'entiers naturels avec $a \leq b$ tels que : $a^2 + b^2 = 36$.

Le cas $AC = 6$ est donc exclu.

D'autre part, d'après la question préliminaire, $9^2 + 12^2 = 15^2$, 9 et 12 étant les seuls entiers qui vérifient $a^2 + b^2 = 225$.

On en déduit : $AC = 15$, $BC = 17$, $AD = 9$ et $DC = 12$.