

VERSAILLES

Exercice n° 1 (Séries S et STI)

Enoncé

Permutations

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.

On écrit les nombres entiers, de 1 à n , dans l'ordre croissant puis dans un ordre quelconque. On obtient ainsi deux listes, $L_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ et $L_2 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On calcule ensuite les distances entre 1 et x_1 , 1 et x_2 , ... et n et x_n . Le tableau suivant donne un exemple de permutation et de calcul dans le cas où $n = 5$ (ce n'est pas le seul).

Liste L_1	1	2	3	4	5
Liste L_2	4	2	1	5	3
Distances	3	0	2	1	2

1. Dans le cas où $n = 4$, puis dans le cas où $n = 5$, donner un exemple de liste L_2 telle que toutes les distances soient deux à deux distinctes.
2. On suppose que $n = 6$. Montrer que, quelle que soit la liste L_2 , deux des distances obtenues, au moins, sont identiques.
3. Plus généralement, montrer que s'il existe une liste L_2 telle que toutes les distances obtenues soient deux à deux distinctes, alors n est un multiple de 4 ou $(n - 1)$ est un multiple de 4.

Solution

1. Les tableaux suivants donnent dans les cas $n = 4$ et $n = 5$ des exemples de permutations dans lesquelles les distances prennent toutes les valeurs possibles une fois.

Liste L_1	1	2	3	4
Liste L_2	4	2	1	3
Distances	3	0	2	1

Liste L_1	1	2	3	4	5
Liste L_2	5	2	4	1	3
Distances	4	0	1	3	2

Remarque : Dire que tous les nombres de la première liste figurent dans la seconde, c'est dire que la somme algébrique des déplacements (dans les exemples précédents $3 + 0 - 2 - 1$ et $4 + 0 + 1 - 3 - 2$) est nulle.

2. Cas $n = 6$. Chacune des distances 0, 1, 2, 3, 4 et 5 étant atteinte une fois et une fois seulement, en vertu de la remarque précédente, on devrait pouvoir séparer la somme $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ en deux sommes égales, et donc égales à sa moitié. Mais cette somme est un nombre impair (15). Donc c'est impossible.

3. Cas général. Dans le cas de n nombres, il s'agit de savoir si la somme $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1)$ est paire. Or cette somme vaut : $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Posons $n = 4p + r$ et donnons successivement à r les valeurs $-1, 0, 1$ et 2 . On constate que S_n est paire dans les cas $r = 0$ et $r = -1$.

Exercice n° 2 (Séries S et STI)

Enoncé

Dominos

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un damier carré de côté n est divisé en n^2 cases carrées de côté 1.

On recouvre **certaines** de ces cases par des dominos rectangles de largeur 1 et de longueur 2. Chaque domino recouvre exactement deux cases ayant un côté commun (disposées l'une à côté de l'autre ou l'une sous l'autre). Aucun domino ne sort du damier et aucune case n'est recouverte par plus d'un domino. Certaines cases ne sont pas recouvertes, mais il n'est pas possible d'ajouter un domino et aucun des dominos placés ne peut glisser vers une case non recouverte.

Un tel recouvrement est dit rigide.

L'objet du problème est d'étudier le nombre maximal de cases non recouvertes dans le cas d'un recouvrement rigide.

1. On considère un recouvrement rigide du damier de côté n .

- a. Prouver qu'il n'y a aucune case non recouverte parmi celles qui forment le bord du damier.
- b. Prouver que dans tout sous-damier de 2×2 cases, il n'y a pas plus d'une case non recouverte.

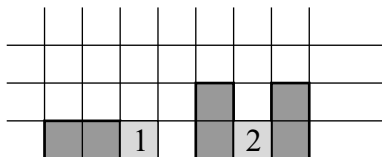
- c. Prouver que dans tout sous-damier rectangle de 5×2 cases, il n'y a pas plus de deux cases non recouvertes.
2. Donner un exemple de recouvrement rigide du damier carré 7×7 où 5 cases ne sont pas recouvertes.
3. Prouver que dans un recouvrement rigide du damier $n \times n$ il n'y a pas plus de $\frac{n(n+5)}{5}$ cases non recouvertes.
4. Prouver que, pour tout n supérieur ou égal à 7, on peut trouver un recouvrement rigide avec au moins $\frac{(n-6)^2}{5}$ cases non recouvertes.
5. On note $f(n)$ le plus grand nombre de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide d'un damier $n \times n$. Vers quelle limite tend $\frac{f(n)}{n^2}$?

Solution

1. Étude de certaines configurations

a. Le bord.

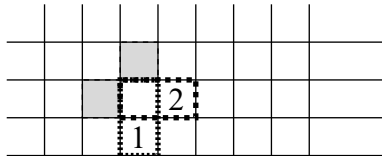
Si une case libre est voisine d'au moins un domino occupant deux cases du bord, ce domino peut être glissé vers la case vide (cas 1 de la figure).



Si ce n'est pas le cas, alors la case libre est voisine de deux dominos n'occupant qu'une case du bord (cas 2) et alors soit sa troisième voisine est libre et il y a deux cases libres contiguës, soit elle ne l'est pas et est couverte par un domino qui peut glisser vers la case libre.

b. Le sous-damier de quatre cases.

Il est exclu que deux cases voisines soient libres. Un damier de quatre cases peut donc avoir au maximum deux cases libres se touchant par un coin. Dans ce cas, le domino

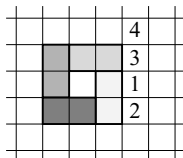


qui recouvre une des cases recouvertes du damier est en position 1 ou 2 (c'est nécessairement 2 si la case en bas à droite est au coin en bas à droite de l'échiquier, par exemple). Mais alors les dominos 1 et 2 peuvent glisser, l'un vers le haut, l'autre vers la droite. Donc un sous damier de quatre cases en a au plus une libre.

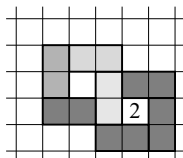
Réflexions intermédiaires sur la situation autour d'une case libre

Une case libre n'est pas sur le bord et elle n'a comme voisines, par les côtés

ou par les coins, que des cases couvertes par des dominos dont aucun ne peut glisser vers elle. Où se trouve son éventuelle plus proche voisine libre ? À une isométrie près, en 1, en 2, en 3 ou en 4 sur le dessin ci-dessous.

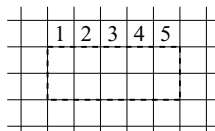


La case 3 peut être recouverte par glissement du domino à sa gauche. Les cases 1 et 4 ne peuvent être entourées par quatre dominos qui lui présenteraient chacun sa longueur. C'est en revanche possible pour la case 2. Trois autres cases sont dans une situation analogue.

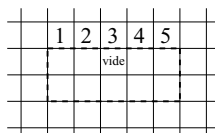


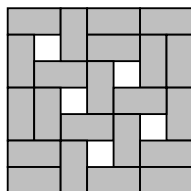
c. Le sous-damier 5×2 .

Le nombre de cases non recouvertes dans un sous-damier 5×2 est inférieur ou égal à 3 d'après la question précédente. Supposons qu'il y ait trois cases non recouvertes. Elles se situent nécessairement dans les colonnes 1, 3 et 5 (il n'y en a qu'une dans les colonnes 1 et 2, et qu'une dans les colonnes 4 et 5 donc s'il y en a trois, il y en a une dans la colonne 3, etc.)



Dans le sous-damier 5×2 , s'il y a une case libre dans la colonne 3, une seule des autres cases du damier est dans une situation analogue à la case 2 de notre réflexion (elle est dans la colonne 3 ou dans la colonne 5, mais il n'y en a qu'une). Donc il y a au maximum 2 cases non recouvertes dans ce sous-damier.



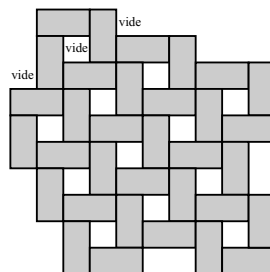
2. Le damier 7×7 et ses cinq cases libres

3. Étude de la proportion de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide. Majoration.

On recouvre le damier $n \times n$ par un pavage de damiers 5×2 , par exemple les « longueurs 5 » dans le sens de la longueur. Si n est impair, la rangée la plus basse n'est pas recouverte, mais cela n'a pas d'importance, attendu qu'elle ne contient pas de case libre. Le nombre de sous-damiers 5×5 utilisé pour ce recouvrement est inférieur à $\frac{n}{2} \times \frac{n+5}{5}$ et chacun de ces sous-damiers contient au plus deux cases libres. Le nombre de cases libres, au total est donc inférieur à $n \frac{n+5}{5}$.

4. Étude de la proportion de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide. Minoration.

L'esquisse ci-contre montre un agencement permettant, sur chaque ligne et chaque colonne, de faire alterner une case libre et 4 cases recouvertes. Sur une ligne de n cases, les deux cases extrêmes doivent être recouvertes, et on occupe avec des alignements de 4 cases recouvertes et une libre un multiple de 5 plus grand que $(n-2) - 4$. Le nombre de cases libres est donc supérieur à $\frac{(n-6)^2}{5}$.



5. Comportement limite. Pour n assez grand, on a $\frac{(n-6)^2}{5n^2} < \frac{f(n)}{n^2} < \frac{n(n+5)}{5n^2}$.

La proportion de cases non recouvertes tend vers $\frac{1}{5}$.

Exercice n° 3 (Séries autres que S et STI)

Énoncé

Circulez !

Dans un pays se trouvent 5 villes reliées deux à deux par des routes. Il n'y a jamais plus d'une route entre deux villes. Ces routes ne se croisent pas, certaines passant si nécessaire au-dessus d'autres au moyen de ponts. Chaque route est à sens unique.

Des responsables du Ministère du sens de la circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on sort d'une ville quelconque, il est impossible d'y revenir.

Un tel réseau de routes entre les 5 villes est dit catastrophique.

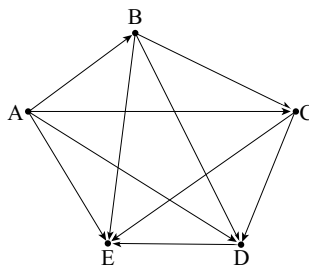
1. Donner un exemple de réseau catastrophique.
2. Prouver que dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.
3. Prouver que dans tout réseau catastrophique, il y a une ville depuis laquelle on peut atteindre directement toutes les autres.
4. Combien, au minimum, faut-il changer de sens de circulation pour qu'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (en plusieurs étapes, éventuellement) dans le nouveau réseau routier obtenu ?
5. Prouver qu'il y a exactement 120 réseaux routiers catastrophiques possibles

Solution

1. La figure ci-contre donne un exemple de réseau catastrophique.

2. Supposons qu'on puisse sortir de toute ville. Partons de A et allons à B (le fait de suivre l'ordre alphabétique n'enlève rien à la généralité). On peut sortir de B, par hypothèse, et on ne peut pas aller à A, d'après l'énoncé. Allons donc à C. On peut sortir de C, mais pas pour aller à A ni pour aller à B. On peut aller à D. De D on peut sortir mais seulement pour aller à E... d'où on ne peut sortir puisque ce serait pour aller à une ville dont on est sorti. Il y a donc une contradiction : dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.

3. Dans un réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir, E par exemple. Le réseau des quatre villes A, B, C et D est un réseau catastrophique de 4 villes. Les raisonnements faits pour 5 valent pour 4. Il y a donc dans ce sous-réseau une ville dont on ne peut sortir, D par exemple. On recommence jusqu'au réseau de 2 villes A et B ; on ne peut sortir de l'une des deux, et de l'autre on peut atteindre toutes les villes précédemment examinées.



4. Supposons, comme dans l'exemple ci-dessus, que de A on puisse aller directement à toute autre ville et que de toute autre ville on puisse aller directement à E. Changeons le sens de circulation de la route qui va de A à E et faisons-la aller de E à A. On peut alors aller de A à toute autre ville, y compris E avec une étape. On peut aller de B à toute autre ville (pour aller à A on passe par E), de C à toute autre ville (pour aller à A on passe par E, pour aller à B on passe par E et A), de D à toute autre ville en passant par E et A éventuellement, et enfin de E à toute autre ville en passant par A. La réponse est donc : un.

5. Les raisonnements précédents montrent que tous les réseaux catastrophiques sont identiques à une permutation des lettres près. Il y en a donc $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ soit 120.

Exercice n° 4 (Séries autres que S et STI)

Enoncé

Carré latin diagonal

Soit n un entier naturel non nul.

On considère un tableau carré à n lignes et n colonnes, dont chaque case contient un entier compris entre 1 et n , de telle sorte qu'il n'y ait pas deux fois le même nombre sur la même ligne, ni sur la même colonne, ni sur chacune des deux diagonales principales. On dit qu'un tel carré est un carré latin diagonal.

On appelle masse du tableau la somme des nombres situés dans les cases en bas à gauche sous la première diagonale (celle qui contient la case située en haut à gauche).

Cette masse est notée M .

1	3	4	5	2
2	4	1	3	5
3	2	5	4	1
5	1	3	2	4
4	5	2	1	3

La figure ci-dessus représente un carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes. Sa masse est égale à la somme des nombres situés dans les cases grisées : $M = 28$.

- Y a-t-il des carrés latins diagonaux à 2 lignes et 2 colonnes ? à 3 lignes et 3 colonnes ?
- On s'intéresse aux carrés latins diagonaux à 4 lignes et 4 colonnes.
 - Donner un exemple d'un tel carré et calculer sa masse.
 - Montrer que tout carré latin diagonal de ce type a une masse inférieure à 17.
 - Donner un exemple d'un tel carré latin diagonal de masse 17.
 - Quelle est la valeur minimale de la masse d'un carré latin diagonal à 4 lignes et 4 colonnes ?

3. On s'intéresse aux carrés latins diagonaux à 5 lignes et 5 colonnes.

- Compléter le carré ci-dessous pour obtenir un carré latin diagonal de masse 30 (on expliquera d'abord comment remplir les cases grisées).

1				2
		5		4
4				3

- Donner un exemple de carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes de masse 32.
- Déterminer la valeur maximale de la masse d'un carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes.

Solution

1. Non. Écrire la première ligne en utilisant l'ordre arbitraire 1, 2 ou 1, 2, 3. L'impossibilité apparaît au nombre suivant dans le cas 2×2 , dès qu'on a écrit une colonne ou une diagonale dans le cas 3×3 .

2. Carrés latins diagonaux à 4 lignes et 4 colonnes.

4	2	3	1
3	1	4	2
1	3	2	4
2	4	1	3

Ce carré latin diagonal a pour masse 14.

Sous la première diagonale d'un carré latin diagonal, il y a 6 cases. Le nombre situé dans première colonne et la quatrième ligne ne peut être répété ni sur sa ligne, ni sur sa colonne, ni sur sa diagonale. Il n'apparaît donc qu'une fois. Les trois nombres situés exactement sous la première

diagonale ne peuvent être égaux, car alors il faudrait en mettre un sur la première ligne et la quatrième colonne, et donc sur la deuxième diagonale où il y en a déjà un. Il peut donc y en avoir au maximum deux d'une sorte, un d'une autre. Il reste deux nombres à placer. Quoi qu'on fasse, la répartition des six nombres est 2, 2, 1 et 1. Au maximum, on a donc deux 4, deux 3, un 2 et un 1. Le total est 17.

Le carré latin diagonal ci-dessous a pour masse 17.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Le raisonnement fait plus haut pour le maximum vaut pour le minimum, qui est donc $2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 = 13$.

Voici ci-dessous un carré latin diagonal de masse 13 :

3	4	1	2
1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1

3. Carré latins diagonaux 5×5 .

1	5	3	4	2
3	4	2	1	5
2	1	5	3	4
5	3	4	2	1
4	2	1	5	3

carré latin diagonal
 5×5 de masse 30

1	2	3	5	4
3	4	2	1	5
4	1	5	3	2
5	3	4	2	1
2	5	1	4	3

carré latin diagonal
 5×5 de masse 32

Masse d'un carré latin diagonal 5×5 :

	4			5
5				4
4	5			
		4	5	
		5	4	

Comme il y a quatre colonnes à occuper, on utilisera au moins 4 chiffres distincts. Mais si les cases à occuper dans la première colonne et dans la quatrième ligne sont occupées par les quatre mêmes chiffres, le cinquième se trouve deux fois dans la diagonale principale (aux deux bouts). Donc il faut utiliser les 5 chiffres.

Si on utilise quatre fois un même chiffre, il apparaît dans 4 lignes et 4 colonnes. On ne peut donc pas placer ce chiffre sur la diagonale principale (il n'est ni à une extrémité, ni dans les colonnes 2 et 3, ni dans les lignes 3 et 4). Donc chaque chiffre est utilisé au maximum 3 fois.

Peut-on utiliser deux fois trois chiffres identiques ?

Pour utiliser trois chiffres 5, par exemple, comme dans le carré représenté ci-dessus, on ne peut les disposer tous les trois sur les trois dernières lignes et les trois premières colonnes, car alors les deux restants sont dans le carré 2×2 en haut à droite et alors il y en a deux ou aucun sur la seconde diagonale. Donc un de ces chiffres est sur la deuxième ligne ou la quatrième colonne. Si cela est, par exemple sur la deuxième ligne comme ci-dessus, alors aucun autre 5 ne peut se trouver à l'intersection de la quatrième ligne et de la deuxième colonne, car avec le troisième 5 à placer, la diagonale principale ne peut plus accueillir de 5. Ils ne peuvent être tous les trois sur la sous-diagonale pour la même raison. La disposition des 5 ci-dessus est, à une symétrie près, la seule qui permette de placer des 5 sur les 5 lignes, les 5 colonnes et les deux diagonales. Mais alors il n'est pas possible de faire la même chose avec un autre chiffre, car on ne peut en placer un exemplaire sur chacune des diagonales.

On peut donc placer trois chiffres d'une sorte, trois fois deux chiffres d'autres sortes et enfin un chiffre, comme sur la figure ci-dessous.

4	2	1	3	5
5	1	4	2	3
2	5	3	1	4
3	4	2	5	1
1	3	5	4	2

Le maximum est donc : $3 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + 1 = 34$.