

TOULOUSE

Exercice n° 1 (Toutes séries)

Enoncé

Chapeau les chameaux !

(à rapprocher de Besançon - Ex.2)

Les questions sont indépendantes.

1. Un chamelier et son chameau, quand ils se déplacent, consomment pour leur subsistance une banane par kilomètre à eux deux. Ils doivent transporter des bananes d'une bananeraie A à une oasis B distante de 300 km. Il y a 20 000 bananes stockées au point A. Le chameau, un animal adulte très vigoureux ne peut porter que 2000 bananes au maximum en un chargement.
Quel est le nombre maximal de bananes que le chamelier peut faire parvenir en B, en tenant compte du fait que, son travail accompli, il retourne, avec son chameau, à son point de départ A.
2. Parmi les bananes livrées au point B, 7 000 doivent être maintenant acheminées jusqu'à deux villes D et E, situées respectivement à 100 km et 200 km de l'oasis B dans des directions distinctes. Deux jeunes chameaux vont transporter ces bananes. Du fait de leur jeune âge, chacun ne peut transporter que 1 000 bananes au maximum en un seul chargement. La consommation de ces chameaux, et de leurs chameliers, est toujours de 1 banane par kilomètre. De plus, le même nombre de bananes exactement doit être livré, à la fin, à chacune des deux villes D et E, et les deux chameaux doivent revenir à leur point de départ.
Proposer et justifier un ensemble de trajets effectués par ces deux chameaux, permettant de livrer effectivement le plus grand nombre de bananes possible aux villes D et E.
3. En partant de la bananeraie A, le chamelier et son chameau vigoureux qui peut porter jusqu'à 2000 bananes en un seul chargement doivent maintenant transporter des bananes jusqu'à une ville C située à 1 000 km de A. Comme précédemment, ils consomment une banane par kilomètre. Il y a maintenant 3 200 bananes stockées au point A. Son travail achevé le chamelier reste à la ville C. Dans ces conditions le chamelier constate que ce qu'il peut faire de mieux est de faire parvenir 1000 bananes à la ville C en effectuant un seul aller mais en laissant 1200 bananes à la bananeraie. Le chamelier se propose alors, pour ce transport, d'utiliser un point de stockage intermédiaire I, situé à une distance x de A et de faire des allers-retours.

Comment doit s'organiser le chamelier pour faire parvenir un nombre maximum de bananes en C ? Décrire en détail le trajet effectué, préciser la position choisie pour le point de stockage intermédiaire et préciser le nombre de bananes acheminées en C.

Solution (P.L.H.)

1. Le chamelier et son chameau partent de A avec 2 000 bananes. Arrivés en B, il leur en reste 1 700 ; ils en déposent 1 400 en B et en gardent 300 pour la route de retour.

Après avoir accompli 10 fois ce trajet, ils en ont déposé 14 000 en B et il n'en reste plus en A.

2. Pour un trajet BD et retour, on part avec 1000 bananes, on en consomme 200 et on en dépose 800. Pour un trajet BE et retour, on part avec 1000 bananes, on en consomme 400 et on en dépose 600. Soit d le nombre de trajets BD et e le nombre de trajets BE. On a $d+e = 7$ et $800d = 600e$, d'où $d = 3$ et $e = 4$.

3. Pour le premier trajet AI et retour, on part avec 2 000 bananes, on en consomme $2x$ et on en dépose $2\,000 - 2x$ en I. Il reste 1 200 bananes pour un aller simple AI. On en a donc déposé $1\,200 - x$ en I. Il y en a donc $3\,200 - 3x$ à transporter sur $1000 - x$ kilomètres. Ou bien $3\,200 - 3x \leq 2\,000$ et le trajet IC mesurant $1000 - x$, on en amène $3\,200 - 3x - (1000 - x) = 2\,200 - 2x$ en C ou bien $3\,200 - 3x \geq 2\,000$ et il faut faire deux voyages, un aller-retour et un aller simple soit 3 fois $(1000 - x)$ kilomètres. Finalement on en amène $2\,000 - 2(1000 - 2x)$ au premier voyage et $1\,200 - (1000 - x)$ au second, donc en tout $3\,200 - 3(1000 - x) = 200 + 3x$.

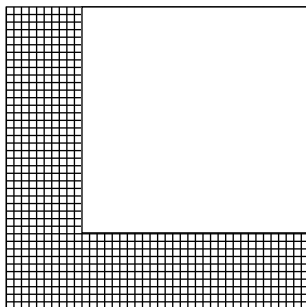
Finalement le nombre de bananes livrées est $2\,200 - 2x$ si $x \geq 400$ et $200 + 3x$ si $x \leq 400$ et le maximum, soit 1 400 est atteint pour $x = 400$.

Exercice n° 2 (Séries autres que S)

Enoncé

Nombres L

Dans une feuille de papier quadrillé, on a découpé un carré en s'aidant du quadrillage : la longueur du côté correspond à un nombre entier de carreaux. Dans ce carré de papier, on enlève, toujours en s'aidant du quadrillage, un carré plus petit (confère figure ci-dessous).



Le carré enlevé a donc pour côté un nombre entier de carreaux. On appelle L le polygone restant ; son aire n est un nombre entier de carreaux. Ainsi, si le grand carré a pour côté 4, le petit pour côté 2, L a pour aire $n = 16 - 4 = 12$ carreaux. On se demande si l'aire de L peut être n'importe quel entier naturel.

1. Quelles sont les aires que l'on peut obtenir pour L lorsque le grand carré a 5 carreaux de côté ?
2. Trouver les dimensions d'un grand carré et d'un petit permettant d'obtenir un polygone L ayant 3 carreaux pour aire.
3. Peut-on obtenir $n = 15$ carreaux ? De combien de façons différentes ?
4. Plus généralement, dans le cas où n est impair, peut-on trouver un grand carré et un petit carré permettant d'obtenir un polygone L ayant une aire d'exactly n carreaux ?
5. Et dans le cas où n est pair ?

Solution (P.L.H.)

1. Si le grand carré a 5 carreaux de côté, l'aire de L peut être
 $25 - 1 = 24$, $25 - 4 = 21$, $25 - 9 = 16$, $25 - 16 = 9$.
2. Soit x et y les dimensions du grand et du petit carré ; on a
 $x^2 - y^2 = 3$ ou $(x - y)(x + y) = 3$ d'où $x = 2$ et $y = 1$.
3. $x^2 - y^2 = 15$ équivaut à $(x - y)(x + y) = 15 = 3 \times 5$ d'où les deux solutions :
 $x = 4, y = 1$ et $x = 8, y = 7$.
4. Si $n = 2p + 1$, pour avoir $(x - y)(x + y) = 2p + 1$, il suffit de choisir $x - y = 1$ et $x + y = 2p + 1$ d'où $x = p + 1$ et $y = p$.
 On peut aussi partir de l'identité $(p + 1)^2 = p^2 + (2p + 1)$.
5. Par contre si n est pair, $(x - y)(x + y) = 2p$ est pair.
 Comme $x - y$ et $x + y$ qui diffèrent de $2y$ ont la même parité, ils sont pairs

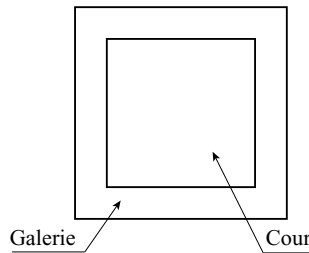
tous les deux et leur produit est divisible par 4, donc $n = 4q$ pour lequel on a la solution $x = q + 1, y = q - 1$ et $4q = (q + 1)^2 - (q - 1)^2$.

Exercice n° 3 (Série S)

Enoncé

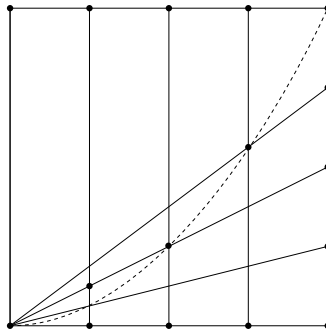
Constructions à la manière des compagnons du Moyen-Âge

Un cloître est constitué d'une cour intérieure centrale entourée d'une galerie latérale. La forme des cloîtres est généralement carrée et telle que l'aire de la galerie est égale à celle de la cour centrale (voir figure).



Les compagnons ont construit un mur extérieur délimitant un enclos carré que l'on veut aménager comme un cloître. Ils disposent pour cela de cordes qu'ils peuvent :

- tendre entre deux points, ce qui permet de tracer des segments de droites ;
 - tendre à partir d'un point fixe, ce qui permet de tracer des arcs de cercle.
1. Proposer une méthode permettant de tracer dans l'enclos un carré délimitant la future cour intérieure du cloître.
 2. Les compagnons ont tracé, dans la cour intérieure, un chemin. Voici la construction qui a été réalisée :



Comment les compagnons ont-ils pu partager les côtés du carré en 4 parties égales avec leurs cordes ?

L'idée des compagnons serait de poursuivre en partageant en 8, puis en 16,

etc. Le chemin a été ébauché en pointillés sur la figure ci-dessus. Que dire de sa forme possible ?

Solution (P.L.H.)

1. Soit L et ℓ la longueur des côtés des deux carrés. On a $L^2 = 2\ell^2$ ou $L = \ell\sqrt{2}$. On trace les deux diagonales du grand carré ; elles se coupent au centre O des deux carrés. Les diagonales du petit carré mesurent $\ell\sqrt{2} = L$. On construit la médiatrice d'un des côtés du grand carré, ce qui détermine $\frac{L}{2}$ qu'on reporte à partir de O sur les deux diagonales, ce qui donne les 4 sommets du petit carré.
2. Le partage en 4 se fait en construisant les médiatrices correspondantes. On peut aussi tracer les deux diagonales du grand carré puis les deux diagonales des quatre carrés obtenus en divisant le grand.

La construction suggérée par la figure introduit pour $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ les points d'ordonnée $x \times x = x^2$ qui sont sur la parabole d'équation $y = x^2$.