

STRASBOURG

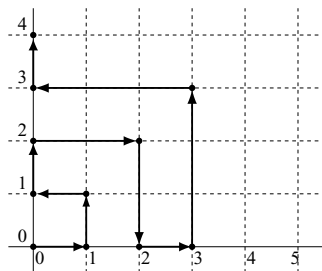
Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

Les déplacements sur un réseau (à rapprocher de Nice - Ex. 2/3)

Une fourmi se déplace à vitesse constante de 1 cm par seconde.

Elle se déplace comme indiqué sur le schéma ci-contre, partant de $(0; 0)$ et visitant tous les points $(a; b)$ à coordonnées entières positives ou nulles.



1. Combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre ainsi les points $(3; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 4)$ et $(5; 5)$?
2. Si p désigne un entier naturel, combien de temps lui faudra-t-il pour passer du point $(2p; 0)$ au point $(2p + 2; 0)$?
3. Si p désigne un entier naturel, combien de temps lui faudra-t-il pour passer du point $(2p + 1; 0)$ au point $(2p + 3; 0)$?
4. Si n désigne un entier naturel, combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre le point $(n; 0)$? le point $(n; n)$?
5. Où se trouvera la fourmi au bout de 2008 secondes ?

Solution (P.L.H.)

1. La fourmi atteint $(3; 0)$ en 9 secondes, $(4; 0)$ en 24 secondes, $(4; 4)$ en 20 secondes et $(5; 5)$ en 30 secondes.

2. Pour passer de $(2p; 0)$ à $(2p + 2; 0)$ elle passe à $(2p + 1; 0)$ en 1 seconde, de là à $(2p + 1; 2p + 1)$ en $2p + 1$ secondes, de là à $(0; 2p + 1)$ en $2p + 1$ secondes, de là à $(0; 2p + 2)$ en 1 seconde puis à $(2p + 2; 2p + 2)$ en $2p + 2$ secondes et enfin de $(2p + 2; 2p + 2)$ à $(2p + 2; 0)$ en $2p + 2$ secondes.

Elle met donc en tout $1 + 2p + 1 + 2p + 1 + 1 + 2p + 2 + 2p + 2 = 8p + 8$ secondes.

3. Pour passer du point $(2p + 1; 0)$ au point $(2p + 3; 0)$, elle met
 $2p + 1 + 2p + 1 + 1 + 2p + 2 + 2p + 2 + 1 = 8p + 8$ secondes.

4.

- Si $n = 2p$, pour atteindre le point $(n; 0)$, il lui faut

$$8 + \dots + 8p = \frac{8p(p+1)}{2} = n(n+2)$$

et elle avait atteint le point $(n; n)$ n secondes plus tôt, soit en $n(n+2) - n = n(n+1)$ secondes.

- Si $n = 2p + 1$, pour atteindre le point $(n; 0)$, il lui faut

$$1 + 8(1 + 2 + \dots + p) = 1 + \frac{8p(p+1)}{2} = 1 + (n-1)(n+1) = n^2.$$

puis encore n secondes pour atteindre le point $(n; n)$ soit en tout $n^2 + n = n(n+1)$.

5. Au bout de $44 \times 45 = 1980$ secondes, la fourmi a atteint le point $(44; 44)$.
Il lui reste 28 secondes pour atteindre le point $(44; 44 - 28)$ ou $(44; 16)$.

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Les triplets

On part d'un triplet de réels (a, b, c) que l'on transforme en $(a+b, b+c, c+a)$. On recommence cette opération indéfiniment.

Par exemple avec $(1, 3, -4)$ on obtient successivement $(4, -1, -3)$, $(3, -4, 1)$, $(-1, -3, 4)$, $(-4, 1, 3)$, $(-3, 4, -1)$, $(1, 3, -4)$ qui est le triplet initial, et le processus est donc périodique.

Déterminer à quelle condition portant sur a , b et c le processus est périodique et préciser alors le nombre d'étapes nécessaires pour retomber sur le triplet initial (a, b, c) .

Solution (P.L.H.)

On remarque que la somme des trois éléments du triplet est multiplié par 2 à chaque opération, donc multiplié par 2^n au bout de n .

Le processus ne peut donc être périodique que si cette somme est nulle. On a alors la transformation : $(a, b, c) \rightarrow (-c, -a, -b)$ et en itérant

$$\begin{aligned} &\rightarrow (b, c, a) \rightarrow (-a, -b, -c) \\ &\rightarrow (c, a, b) \rightarrow (-b, -c, -a) \rightarrow (a, b, c). \end{aligned}$$

On retrouve donc le triplet initial en six étapes.

Remarque : si $a = b = c = 0$, le processus est périodique de période 1.

Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Les carrés et les cubes

On écrit les entiers de 1 à 2008 qui ne sont ni des carrés ni des cubes d'entiers.

Combien en écrit-on ?

Solution (P.L.H.)

Les carrés sont en nombre n tel que $n^2 \leq 2008 < (n+1)^2$.

Or $44^2 = 1936 \leq 2008 < 2025 = 45^2$ d'où $n = 44$.

Les cubes sont en nombre m tels que $m^3 \leq 2008 < (m+1)^3$.

Or $12^3 = 1728 \leq 2008 < 2197 = 13^3$ d'où $m = 12$.

Si un nombre est à la fois carré de p et cube de q , on a $p^2 = q^3$ et tout diviseur premier de q divise p^2 donc p et, de même, tout diviseur premier de p divise q . Il existe donc un naturel z tel que $p^2 = q^3 = z^6$ et réciproquement.

Or $3^6 = 729 \leq 2008 < 4096 = 4^6$.

Parmi les 2008 entiers de 1 à 2008, il y a donc $44 + 12 - 3 = 53$ entiers carrés ou cubes et $2008 - 53 = 1955$ qui ne sont ni l'un ni l'autre.

Exercice n° 4 (Séries autres que S)

Enoncé

Les balles de tennis

On dispose de n balles de tennis à répartir entre trois joueurs : Paul, Henri et Mathieu. Un joueur peut ne recevoir aucune balle.

1. Déterminer le nombre de répartitions possibles dans les cas $n = 3$ puis $n = 4$.
2. Déterminer le nombre de répartitions possibles dans le cas général.

Solution (P.L.H.)

1. pour $n = 3$ on a les 10 répartitions :

P	H	M	P	H	M
0	0	3	2	0	1
0	3	0	0	2	1
3	0	0	2	1	0
0	1	2	1	0	2
1	2	0	1	1	1

Pour $n = 4$, on a les 15 répartitions

P	H	M	P	H	M	P	H	M
0	0	4	3	0	1	2	2	0
0	4	0	0	3	1	2	0	2
4	0	0	3	1	0	1	1	2
0	1	3	1	0	3	1	2	1
1	3	0	0	2	2	2	1	1

2. Pour résoudre le cas général, plaçons les n balles en ligne



Puis deux cloisons de carton soit entre elles soit à l'une des extrémités ou aux deux.

Nous attribuons les balles de gauche à Paul, celles du milieu à Henri et celle de droite à Mathieu.

On établit ainsi une bijection entre les répartitions possibles et les sous-ensembles à 2 éléments d'un ensemble de $n + 2$ éléments. On sait qu'il y a

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ tels sous-ensembles}$$

On vérifie que $10 = \frac{4 \times 5}{2}$ et $15 = \frac{5 \times 6}{2}$.