

ROUEN

Exercice n° 1 (Séries S et STI)

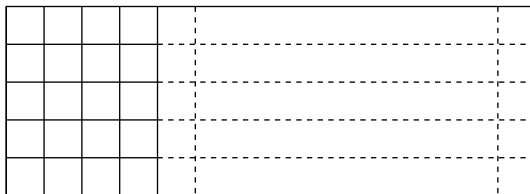
Enoncé

Une mosaïque en or

Un rectangle d'or est un rectangle tel que le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ soit égal à $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, ce nombre étant appelé « Nombre d'or » et noté Φ (la lettre « phi » de l'alphabet grec).

Le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est appelé « format », pour tout rectangle.

1. La carte de retrait d'une banque est inscrite dans un rectangle de dimensions 8,5 cm par 5,4 cm alors que la carte de visite de ses conseillers est rectangulaire de longueur 8,95 cm et de largeur 5,5 cm. Calculer le format de ces rectangles. Laquelle des deux cartes est celle dont le format est le plus proche du nombre d'or ?
2. Une ville souhaite mettre en valeur une grande façade de forme rectangulaire située en entrée d'agglomération. On dispose pour cela de 2008 pavés colorés de forme carrée d'un mètre de côté. Ils permettront de faire réaliser une mosaïque rectangulaire par juxtaposition continue de ces carrés.



La forme obtenue est un rectangle « sans trou ». Peut-on former un rectangle d'or avec l'ensemble des 2008 pavés ?

Et avec un nombre quelconque de pavés entiers ?

3. Les services techniques de la ville proposent de réaliser une mosaïque dont les dimensions sont les valeurs approchées entières d'un rectangle d'or d'aire 2008 m² et ce, en utilisant un maximum des 2008 pavés colorés. Quel est le format du rectangle proposé et combien reste-t-il de pavés inutilisés ?

4. Le service culturel souhaite que la mosaïque réalisée ait une longueur comprise entre 50 et 60 mètres. Déterminer alors les dimensions de la mosaïque dont le format est le plus proche de Φ .
Combien reste-t-il alors de pavés inutilisés ?

Solution (P.L.H.)

1. $f_1 = \frac{8,5}{5,4} \approx 1,574$; $f_2 = \frac{8,95}{5,5} \approx 1,627$ tandis que $\Phi \approx 1,6180$; c'est le format de la seconde carte qui est le plus proche de Φ .

2. S'il était possible de former un rectangle d'or de côtés ℓ et $\ell\Phi$, son aire $\ell^2\Phi$ devrait être entière ainsi que ℓ^2 ; Φ serait donc rationnel ainsi que $\sqrt{5}$, ce qui n'est pas. Ce pavage est donc impossible aussi bien pour 2008 pavés que pour un nombre quelconque.

3. L'objectif est ici d'utiliser le plus grand nombre possible de pavés, inférieur ou égal à 2008.

Si on ne précise pas ce qu'on appelle valeur approchée de Φ , en partant de la décomposition en facteurs premiers $2008 = 2^3 \times 251$, on peut réaliser un pavage de format $\frac{251}{8} = 31,3$, valeur approchée de Φ à 30 près !

Plus sérieusement, de $2006 = 59 \times 34$ on déduit un rectangle de format $\frac{59}{34} \approx 1,71$ valeur approchée de Φ à 0,12 près, qui laisse deux pavés seulement inutilisés.

De $1995 = 57 \times 35$ on déduit un rectangle de format $\frac{57}{35} = 1,6286$ valeur approchée de Φ à 0,011 près et il reste 13 pavés.

4. L'objectif est maintenant d'obtenir un format le plus proche de Φ possible.

Si l'on s'impose par exemple d'avoir $1,61 \leq \frac{L}{\ell} \leq 1,62$ et $L\ell \leq 2008$, on

obtient $L^2 = \frac{L}{\ell} \times \ell L \leq 1,62 \times 2008 < 3253$.

Or $57^2 = 3249 < 3364 = 58^2$.

Donc $L \leq 57$. Par ailleurs on s'impose $L \geq 50$.

En cherchant les couples $(L ; \ell)$ qui satisfont $50 \leq L \leq 57$

et $\frac{L}{1,62} \leq \ell \leq \frac{L}{1,61}$. On trouve $(50 ; 31)$ avec $\frac{50}{31} = 1,613$ et $(55 ; 34)$ avec

$\frac{55}{34} = 1,6176$. Ce dernier couple donne donc une valeur approchée de Φ par défaut à 0,004 près.

Il reste $2008 - 55 \times 34 = 2008 - 1870 = 138$ pavés non utilisés.

Remarque :

Φ possède une propriété remarquable : son développement en fraction continue ne contient que le nombre 1.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

ce qui donne les approximations successives $1, 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \dots$

$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$; d'où

$$u_1 = 2, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = \frac{5}{3}, u_4 = \frac{8}{5}, u_5 = \frac{13}{8}, u_6 = \frac{21}{13}, u_7 = \frac{34}{21}$$

et $u_8 = \frac{55}{34}$.

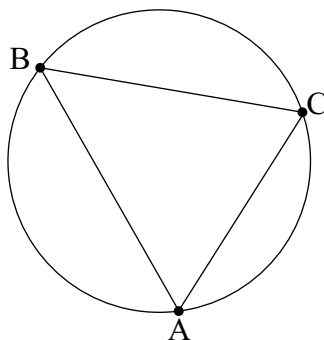
On remarque que les dénominateurs et les numérateurs forment deux suites de Fibonacci.

Exercice n° 2 (Séries S et STI)

Enoncé

Cercle et régions

Soit un cercle ($\mathcal{C}$). On place des points distincts deux à deux sur ce cercle, et on trace tous les segments joignant ces points deux à deux. Les points sont choisis de telle manière que jamais trois segments ne sont concourants en un même point dans le disque. Ces segments déterminent sur le disque des régions. Par exemple, avec trois points A, B et C on obtient quatre régions.



Combien obtient-on de régions avec quatre points ?

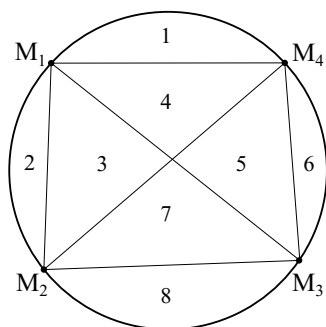
Avec cinq points ?

Avec six points ?

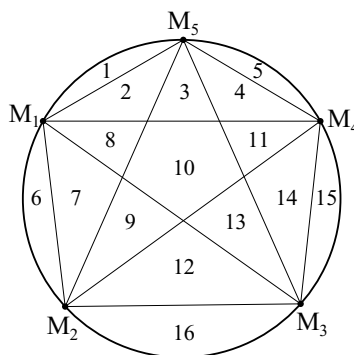
Avec sept points ?

Expliciter une méthode permettant de dénombrer le nombre de régions supplémentaires obtenues en rajoutant un huitième point, puis un neuvième.

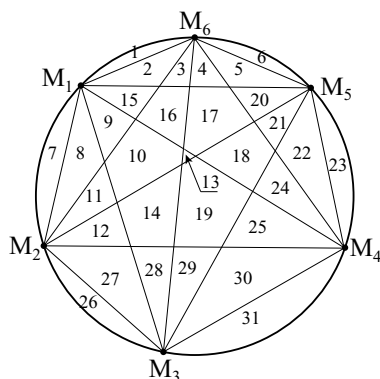
Peut-on généraliser ?

Solution (P.L.H.)

quatre points



cinq points



six points

Jusqu'à 6 points, une figure soigneuse permet de compter huit régions pour quatre points, seize pour cinq et trente et une pour six.

Attention ! Comme avec un point on a une seule région et deux avec deux points et quatre avec trois, on serait tenté de penser qu'on obtient 2^{n-1} régions avec n points, mais on vient de trouver le premier contre-exemple pour six points.

Partons d'une figure à n points et numérotions-les dans l'ordre sur le cercle. Rajoutons le $(n+1)^{me}$ point entre M_n et M_1 . Nous devons tracer les n segments d'origine M_{n+1} : $M_{n+1}M_1, M_{n+1}M_2, \dots, M_{n+1}M_n$.

Quand nous traçons le segment $M_{n+1}M_k$, nous rajoutons autant de régions que ce segment est découpé en sous-segments par les segments M_iM_j avec $1 \leq i \leq k-1$ et $k+1 \leq j \leq n$.

Soit $(k-1)(n-k)$ points distincts car trois segments ne sont pas concourants par hypothèse.

Il y a donc $(k-1)(n-k) + 1$ sous-segments et autant de régions rajoutées, et,

en faisant varier k de 1 à n

$$n + \sum_{k=1}^n (k-1)(n-k).$$

En désignant par u_n le nombre de régions pour n points, on a donc

$$u_{n+1} = u_n + n + \sum_{k=1}^n (k-1)(n-k).$$

Partant de $u_1 = 1$, on retrouve $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 8$, $u_5 = 16$, $u_6 = 31$ puis $u_7 = u_6 + 6 + 20 = 57$.

De $\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_1^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on déduit

$$n + \sum_{k=1}^n (k-1)(n-k) = \frac{n(n^2 - 3n + 8)}{6}$$

puis

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_1 + \sum_{k=1}^n \frac{k(k^2 - 3k + 8)}{6} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{k^3 - 3k^2 + 8k}{6} \\ &= 1 + \frac{n^2(n+1)^2}{24} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{4}{3} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{24} (n^2 - 3n + 14). \end{aligned}$$

Exercice n° 3 (Séries ES,L, STG et STL)

Enoncé

Nombres pratiques

Un entier n est dit **pratique** si tout entier non nul inférieur ou égal à n est soit un diviseur de n , soit peut s'écrire comme somme de certains diviseurs **distincts** de n .

Par exemple, 6 a pour diviseurs : 1, 2, 3, 6 et $4 = 3 + 1$, $5 = 3 + 2$; 6 est donc un nombre pratique.

1. Montrer que 8 est un nombre pratique et donner un nombre non pratique.
2. Montrer que 48 est un nombre pratique.
3. Plus généralement, montrer que le produit de 2 nombres pratiques est un nombre pratique.

Solution (P.L.H.)

1. 8 est *pratique* car il a comme diviseurs 1, 2, 4, 8 et on a $3 = 1 + 2$, $5 = 1 + 4$, $6 = 2 + 4$, $7 = 1 + 2 + 4$.

2. 48 est pratique car il a pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 et
 $5 = 2 + 3$, $7 = 3 + 4$, $9 = 6 + 3$, $10 = 4 + 6$, $11 = 3 + 8$, $13 = 3 + 4 + 6$, $14 = 6 + 8$,
 $15 = 3 + 4 + 8$, $17 = 3 + 6 + 8$, $18 = 6 + 12$, $19 = 3 + 4 + 12$, $20 = 8 + 12$,
 $21 = 3 + 6 + 12$, $22 = 4 + 6 + 12$, $23 = 3 + 8 + 12$, $25 = 1 + 24$, $26 = 2 + 24$,
 $27 = 3 + 24$, $28 = 4 + 24$, $29 = 2 + 3 + 24$, $30 = 6 + 24$, $31 = 3 + 4 + 24$,
 $32 = 8 + 24$, $33 = 1 + 8 + 24$, $34 = 2 + 8 + 24$, $35 = 1 + 2 + 8 + 24$,
 $36 = 4 + 8 + 24$, $37 = 1 + 4 + 8 + 24$, $38 = 2 + 12 + 24$, $39 = 3 + 12 + 24$,
 $40 = 4 + 12 + 24$, $41 = 1 + 4 + 12 + 24$, $42 = 2 + 4 + 12 + 24$, $43 = 1 + 2 + 4 + 12 + 24$,
 $44 = 8 + 12 + 24$, $45 = 1 + 8 + 12 + 24$, $46 = 2 + 8 + 12 + 24$, $47 = 1 + 2 + 8 + 12 + 24$.

3. Le produit de deux nombres pratiques est un nombre pratique. En effet, soit

$$a = \sum_{i=1}^n a_i \text{ et } b = \sum_{j=1}^m b_j \text{ où les } a_i \text{ sont des diviseurs de } a \text{ et les } b_j \text{ des diviseurs}$$

$$\text{de } b \text{ alors } ab = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \text{ où les } a_i b_j \text{ sont les diviseurs de } ab.$$

Exercice n° 4 (Séries ES,L, STG et STL)

Énoncé

Monnaie

À l'entrée d'une kermesse, un enfant demande à la personne qui tient la caisse de lui faire de la monnaie de son billet de 10 €.

Dans la caisse, il n'y a que des pièces de 10 centimes, 20 centimes et 50 centimes. Chaque jeu auquel il peut jouer est desservi par un distributeur dans lequel on ne peut mettre qu'une seule pièce par jeu.

Il veut essayer au moins une fois chaque jeu.

Les trois jeux sont :

- la tombola à 20 centimes ;
- le rasage de ballon à 10 centimes ;
- le chamboule tout à 50 centimes.

Il veut faire 10 fois plus de rasages de ballon que de tombola.

Combien la caissière lui donne-t-elle de pièces de chaque sorte ?

Solution (P.L.H.)

Soit t le nombre de pièces de 20 centimes et de parties de tombola

r le nombre de pièces de 10 centimes et de parties de rasage

c le nombre de pièces de 50 centimes et de parties de chamboule.

On a $r = 10t$ et $10r + 20t + 50c = 1000$

d'où $12t + 5c = 100$

Avec $t \geq 1$ et $c \geq 1$, t doit donc être divisible par 5 et inférieur à 8.

La seule solution est donc : $t = 5$, $c = 8$, $r = 50$.