

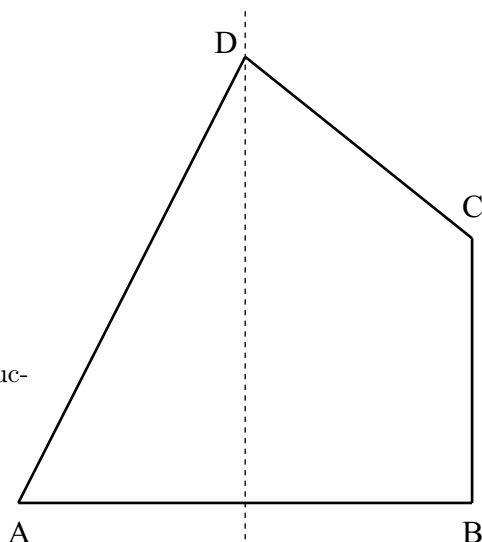
RENNES

Exercice n° 1 (Séries autres que S et STI)

Enoncé

Un aménagement rural

Les frères Dalton ont décidé de changer radicalement de vie et ont acheté avec leurs économies quatre propriétés qu'ils ont rénovées. Ces fermes sont situées comme l'indique le plan. (Vous rendrez le plan avec les différents tracés demandés)



PARTIE A

Ils souhaitent utiliser une énergie renouvelable et optent pour la construction d'une éolienne. Celle-ci devra être installée de sorte que la longueur totale de câbles la reliant aux fermes soit la plus petite possible. Où doit-on l'installer ?

PARTIE B

Ils souhaitent également relier leurs domaines par une route circulaire de rayon r qui soit à une égale distance d de chacun.

1. Joe Dalton propose un tracé dans lequel trois propriétés sont à l'intérieur de la route tandis que la quatrième est à l'extérieur.

Dans le cas où A, B et C sont à l'intérieur :

- Où sera situé le centre O_1 de cette route ?
- Déterminer les valeurs de r et de d en fonction de O_1A et de O_1D et tracer la route.

2. Averrel qui a quelques fois des traits de génie, propose que deux propriétés soient à l'extérieur de la route, les deux autres à l'intérieur.

Dans le cas où A, B sont à l'extérieur :

- Où se trouve le centre O_2 de cette route ?
 - Déterminer les valeurs de r et de d en fonction de O_2A et de O_2D et tracer la route.
3. Combien y a-t-il de solutions possibles ? Chacune de ces solutions a un coût correspondant à la construction de la route et des voies d'accès à cette route depuis les propriétés. Comment peut-on choisir le projet le plus économique ?

PARTIE C

Les quatre frères s'aiment beaucoup et souhaitent construire un saloon dans lequel ils se retrouveront régulièrement. Ils décident de l'implanter à l'endroit S pour lequel la distance le séparant de la propriété la plus éloignée est la plus petite possible. Situer ce point S .

Solution (P.L.H.)

Partie A

On cherche à minimiser $MA + MB + MC + MD$.

$MA + MC$ est minimum si M appartient à $[AC]$,

$MB + MD$ est minimum si M appartient à $[BD]$

M doit donc être à l'intersection I de $[AC]$ et de $[BD]$ et le minimum cherché est égal à $AC + BD$.

Les deux segments $[AC]$ et $[BD]$ se coupent si le quadrilatère $ABCD$ est convexe, ce qu'il est naturel de supposer au vu de la figure.

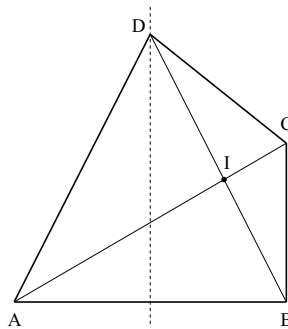


figure 1

Partie B

1. On a $O_1A = O_1B = O_1C = r - d$ et $O_1D = r + d$.

O_1 est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Et $r = \frac{O_1A + O_1D}{2}$, $d = \frac{O_1D - O_1A}{2}$

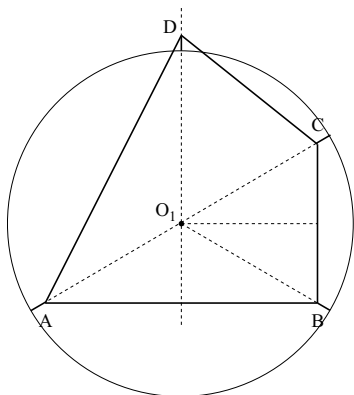


figure 2

2. On a maintenant $O_2A = O_2B = r + d$ et $O_2C = O_2D = r - d$.
 O_2 est donc à l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[CD]$ et $r = \frac{O_2A + O_2D}{2}$, $d = \frac{O_2A - O_2D}{2}$.

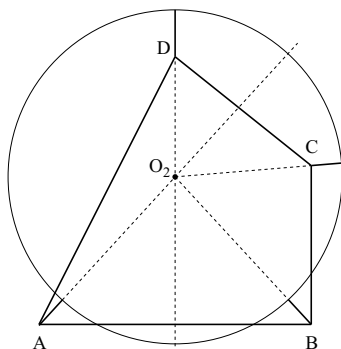


figure 3

3. La figure 2 montre que le quadrilatère ABCD n'est pas inscriptible dans un cercle car D est à l'extérieur du cercle circonscrit à ABC. Il n'y a donc pas de solution avec les quatre points ABCD tous à l'extérieur ou tous à l'intérieur de la route.

Sur la figure 4, nous avons construit les centres des cercles circonscrits O_A à BCD, O_B à CDA, O_C à DAB et O_D à ABC (noté O_1 à la question 1).

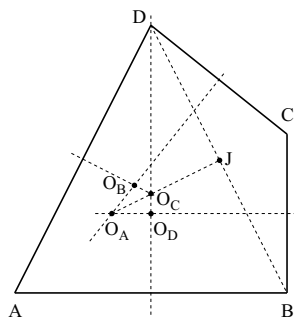


figure 4

A est intérieur au cercle (BCD) (figure 5)

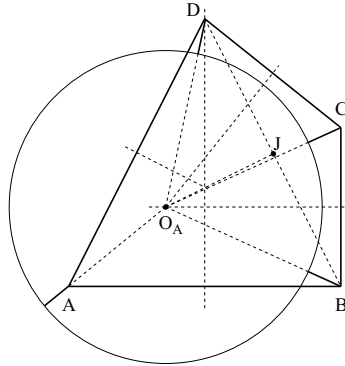


figure 5

B extérieur au cercle (CDA) (figure 6)

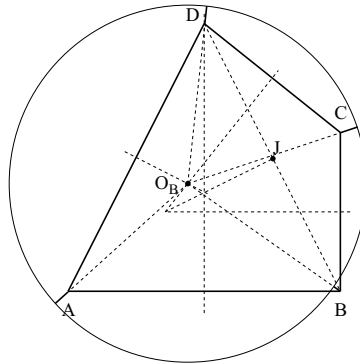


figure 6

C intérieur au cercle (DAB) (figure 7)

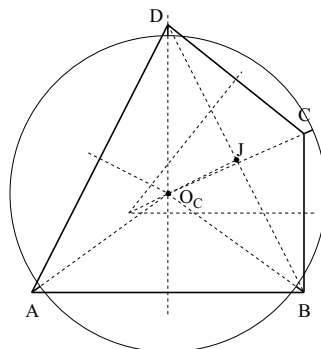


figure 7

et D extérieur au cercle (ABC) (figure 2)

On en déduit :

$$O_A B = O_A C = O_A D = r + d \text{ et } O_A A = r - d$$

$$\text{d'où } \frac{O_A A + O_A D}{2} \text{ et } d = \frac{O_A D - O_A A}{2}$$

$$O_B C = O_B D = O_B A = r - d \text{ et } O_B B = r + d$$

$$\text{d'où } r = \frac{O_B A + O_B B}{2} \text{ et } d = \frac{O_B B - O_B A}{2}$$

$$O_C D = O_C A = O_C B = r + d \text{ et } O_C C = r - d$$

$$\text{d'où } r = \frac{O_C A + O_C C}{2} \text{ et } d = \frac{O_C A - O_C C}{2}.$$

Le cas de $O_D = O_1$ a été traité à la question 1.

Sur les figures 2, 5, 6, 7, nous avons tracé la route et les quatre voies d'accès.

Sur la figure 8, nous avons construit les trois points I_{AB} (noté O_2 à la question 2), I_{AC} et I_{AD} intersection de la médiatrice de $[AB]$ (respectivement $[AC]$, $[AD]$) et de la médiatrice de $[CD]$ (resp. $[BD]$, $[BC]$).

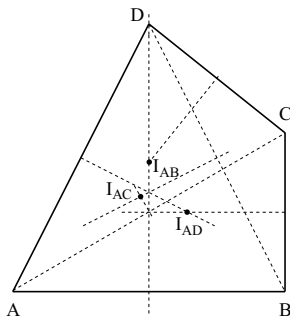


figure 8

Chacun de ces trois points est le centre d'une route circulaire construite sur les figures 3, 9 et 10.

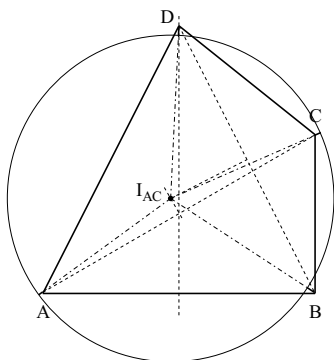


figure 9

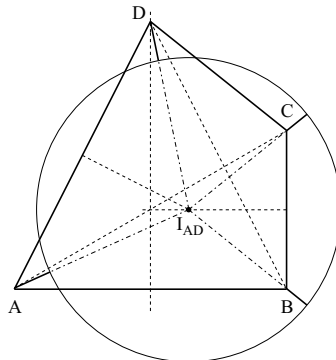


figure 10

D et C sont intérieurs, A et B extérieurs à la route de centre I_{AB} ,
A et C sont intérieurs, B et D extérieurs à la route de centre I_{AC} ,
A et D sont extérieurs, B et C intérieurs à la route de centre I_{AD} .

On en déduit :

$$I_{AB} A = I_{AB} B = r + d, \quad I_{AB} C = I_{AB} D = r - d$$

$$\begin{aligned}
& \text{d'où } r = \frac{I_{AB}A + I_{AB}C}{2}, \quad d = \frac{I_{AB}A - I_{AB}C}{2} \\
& I_{AC}B = I_{AC}D = r + d, \quad I_{AC}A = I_{AC}C = r - d \\
& \text{d'où } r = \frac{I_{AC}B + I_{AC}A}{2}, \quad d = \frac{I_{AC}B - I_{AC}A}{2}, \\
& I_{AD}A = I_{AD}D = r + d, \quad I_{AD}B = I_{AD}C = r - d \\
& \text{d'où } r = \frac{I_{AD}A + I_{AD}B}{2}, \quad d = \frac{I_{AD}A - I_{AD}B}{2}.
\end{aligned}$$

Si la construction d'une voie d'accès a le même coût unitaire que celui de la route, le coût total est de $2\pi r + 4d$.

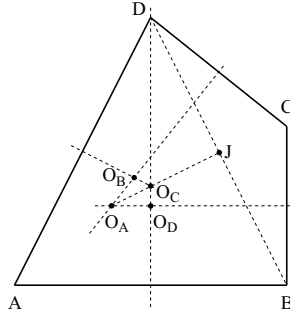
Pour déterminer le projet le plus économique parmi ces sept solutions possibles, il faudrait connaître avec précision les longueurs des segments. Au vu de nos sept figures, c'est la solution de la figure 7 (route de centre O_C) qui semble la plus économique.

Partie C

Le point S cherché doit satisfaire $\text{Max}(SA, SB, SC, SD) < \text{Max}(MA, MB, MC, MD)$ pour tout point M du plan distinct de S.

Toute la difficulté de la question consiste à trouver un bon candidat pour S.

Revenons à la figure 4 et partons du point O_A , centre du cercle circonscrit à BCD.



Par construction, $O_A B = O_A C = O_A D$ mais le minimum de $\text{Max}(MA, MB, MC)$ est atteint en J et égal à $JB = JD$.

Si M parcourt le segment $[O_A J]$,

$$\text{Max}(MA, MB, MC, MD) = \begin{cases} MB = MD & \text{si M appartient au segment } [O_A O_C] \\ MA & \text{si M appartient au segment } [O_C J] \end{cases}$$

Le minimum est donc unique et atteint en O_C .

On peut de même étudier la variation de $\text{Max}(MA, MB, MC, MD)$ quand M parcourt la médiatrice de $[AD]$ ou celle de $[AB]$; le texte y invitait d'ailleurs implicitement puisque cette dernière était tracée sur la figure.

Considérons donc le centre O_C du cercle circonscrit à ABD et soit R le rayon de ce cercle. On a $R = O_C A = O_C B = O_C D > O_C C$ (cf. figure 7) donc le

maximum de $O_C A, O_C B, O_C C, O_C D$ est égal à R .

L'extérieur du disque fermé de centre A et de rayon AO_C contient les points M tels que $AM > AO_C = R$, et de même pour les disques de même rayon de centres B et D (figure 11)

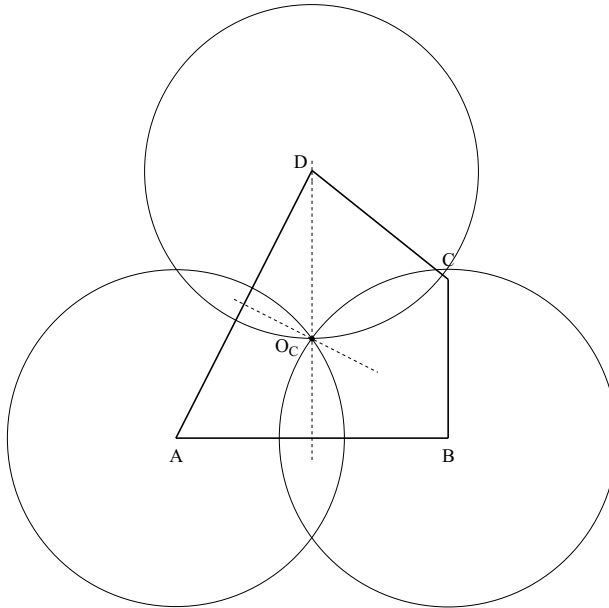


figure 11

Si un point M appartient à la réunion de ces trois extérieurs, il satisfait donc $\text{Max}(AM, BM, CM, DM) > R$.

Or le complémentaire de cette réunion est l'intersection des trois disques et elle est réduite au point O_C .

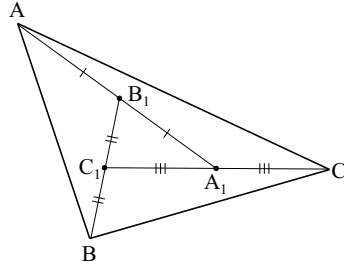
S doit donc être en O_C .

Exercice n° 2 (Séries S et STI)

Enoncé

Un beau terrain

Maître Geo possède un terrain triangulaire ABC dans lequel il veut construire une maison également triangulaire. Il décide d'en choisir les sommets A_1 , B_1 et C_1 de telle sorte que : A soit le symétrique de A_1 par rapport à B_1 , B le symétrique de B_1 par rapport à C_1 et C le symétrique de C_1 par rapport à A_1 . La figure représente cette situation.



Comment faire ?

Une de ses relations, Monsieur Chasles lui propose une solution en lui faisant remarquer que

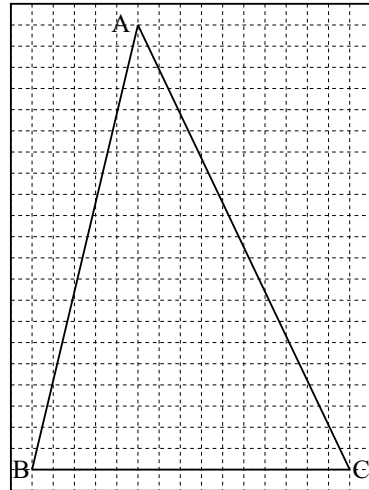
$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{7} \overrightarrow{AC} + \frac{2}{7} \overrightarrow{AB}. \quad (1)$$

Sauriez vous démontrer cette égalité ? Vous pourriez utiliser, *après l'avoir prouvée*, la petite égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ})$ dans laquelle P, Q et M sont trois points du plan et I le milieu du segment [PQ].

L'annexe 1 est un plan du terrain ABC : en utilisant le quadrillage construisez le point A_1 puis le triangle $A_1B_1C_1$. Il vous est demandé d'expliquer votre construction.

Puis Monsieur Chasles lui propose une solution certes approchée mais plus simple car il suffit de savoir trouver le milieu d'un segment. On définit une suite de points (M_n) du plan de la façon suivante :

- M_0 est un point extérieur au triangle.
- M_1 est le milieu de $[M_0A]$, M_2 est le milieu de $[M_1B]$, M_3 est le milieu de $[M_2C]$, M_4 est le milieu de $[M_3A]$, ainsi de suite...



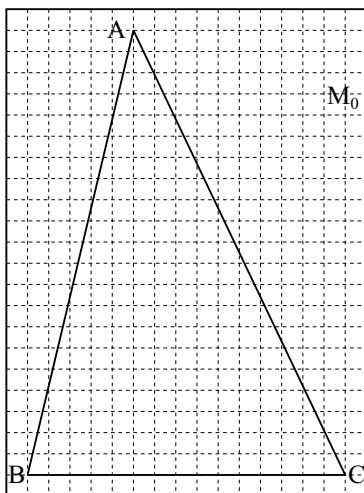
1. En partant du point M_0 représenté sur l'**annexe 2**, construire les 10 premiers points de cette suite.

2. Démontrer :

- que les droites (M_2M_5) et (M_3M_6) sont parallèles
- l'égalité $M_3M_6 = \frac{1}{2}M_2M_5$

3. En déduire :

- que les points M_0 , M_3 et M_6 sont alignés
- l'égalité $M_3M_6 = \frac{1}{23}M_0M_3$



4. Sachant que la feuille de papier utilisée pour dessiner les plans est une feuille 21 cm $\times$ 29,7 cm montrez que si M et N sont deux points de cette feuille MN est inférieur ou égal à 36,38 cm. On suppose que l'épaisseur du trait de crayon est 0,1 mm. En déduire que M_{12} et M_{15} semblent confondus.

Montrez alors que les points M_{12} , M_{13} et M_{14} constituent une solution approchée du triangle $A_1B_1C_1$.

Solution (P.L.H.)

I est le milieu de $[PQ]$ si et seulement si $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{IQ}$ ou $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} = \vec{0}$.
Alors, pour tout point M du plan,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IQ} \\ &= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} \\ \text{ou } \overrightarrow{MI} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}).\end{aligned}$$

A_1 étant le milieu de $[C_1C]$, B_1 celui de $[A_1A]$ et C_1 celui de $[BB_1]$, on en déduit

$$\overrightarrow{MA_1} = \frac{\overrightarrow{MC}}{2}, \quad \overrightarrow{MB_1} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA_1}}{2}, \quad \overrightarrow{MC_1} = \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB_1}}{2}$$

d'où, en choisissant M en A,

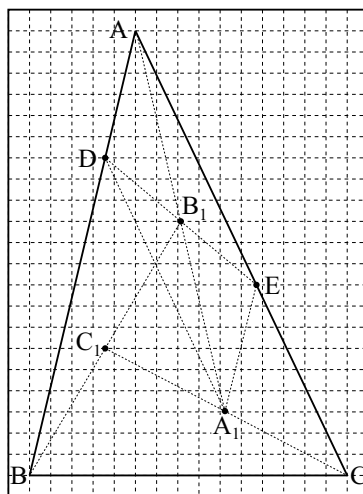
$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1}}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB_1}}{4} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AA_1}}{8}$$

$$\text{et } \frac{7}{8}\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{8}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{ou } \overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}.$$

Sur la figure 1, nous avons construit successivement :

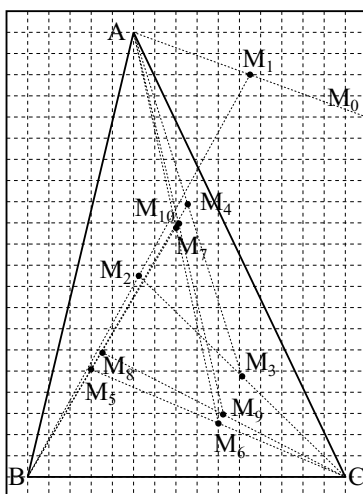
- le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$,
 - le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$.
- D appartient à $[AB]$ et sur la ligne 6 à partir de A sur le quadrillage ; E appartient à $[AC]$ et sur la ligne 12 du quadrillage ;
- le milieu B_1 de $[OE]$ sur la ligne 9,
 - le point A_1 tel que $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB_1}$ sur la ligne 18,
 - le point C_1 , soit comme milieu de $[B_1B]$ soit comme symétrique de C par rapport à A_1 , sur la ligne 15.



1. Sur la figure 2, nous avons construit à partir du point donné M_0 les points de M_1 à M_{10} . (voir ci-contre)

2. Dans le triangle M_2CM_5 , M_3 est le milieu de $[CM_2]$ et M_6 le milieu de $[CM_5]$ donc (Thalès ou théorème des milieux) les droites M_2M_5 et (M_3M_6) sont parallèles et $M_3M_6 = \frac{1}{2}M_2M_5$.

De même pour (M_1M_4) et (M_2M_5) avec $M_2M_5 = \frac{1}{2}M_1M_4$ et pour (M_0M_3) et (M_1M_4) avec $M_1M_4 = \frac{1}{2}M_0M_3$.



3. On en déduit que (M_0M_3) et (M_3M_6) ont même direction donc que M_0 , M_3 et M_6 sont alignés et que $M_3M_6 = \frac{1}{2}M_0M_3$.

4. MN est au plus égal à la longueur de la diagonale de la feuille, soit $21\sqrt{1 + (\sqrt{2})} = 21\sqrt{3} \approx 36,372$ cm.

De proche en proche, on déduit de 2 et 3 que

$$M_{12}M_{15} = \frac{1}{2^{12}}M_0M_3$$

et de $M_0M_3 \leq 364$ mm, $M_{12}M_{15} \leq \frac{364}{4096} < 0,1$ mm.

M_{12} et M_{15} sont alors confondus à l'épaisseur d'un trait près.

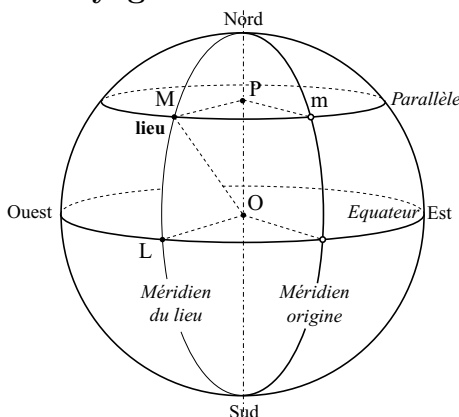
M_3 est le milieu de $[M_{12}A]$, M_4 celui de $[M_{13}B]$ et M_{15} celui de $[M_{14}B]$. Si l'on

confond M_{12} et M_{15} , le triangle $M_{12}M_{13}M_{14}$ est une très bonne approximation du triangle ABC .

Exercice n° 3 (Séries S et STI)

Enoncé⁷

Le voyage



La terre est assimilée à une sphère – le globe terrestre – dont le rayon mesure 6400 km.

Sur ce globe sont tracés des cercles particuliers permettant de se repérer :

- Les **parallèles** intersections des plans perpendiculaires à l'axe NS avec la sphère,
- L'**équateur**, parallèle particulier dont le plan passe par le centre de la sphère,

- Les **méridiens** intersections des plans passant par l'axe NS et parmi eux un a été distingué : celui de Greenwich.

Le repérage se fait au moyen de deux données qui sont la latitude et la longitude :

- **La latitude** d'un lieu M situé sur le globe terrestre est l'angle exprimé en degrés (°) minutes (') mesuré entre le parallèle passant par ce point et l'équateur. Elle se compte de 0° à 90° vers le Nord ou vers le Sud.
- **La longitude** d'un lieu M situé sur le globe terrestre est l'angle exprimé en degrés (°) minutes (') mesuré entre le méridien passant par ce point et le méridien de référence passant par Greenwich.

La longitude se compte de 0° à 180° vers l'Est ou vers l'Ouest.

On rappelle enfin que les marins utilisent une unité de mesure le mille marin qui vaut 1852 m.

Question préliminaire : Exprimer la latitude et la longitude de M en utilisant les points et les angles de la figure.

Partie A

- 1- Le capitaine Haddock parti de l'île de Sein (latitude de 48° Nord, longitude 4°51 Ouest) parcourt 123 milles cap au sud et jette l'ancre. A quelle latitude est-il ?

⁷Nous avons légèrement modifié les données initiales pour être sûrs que les différents trajets soient bien effectués en pleine mer (voir la carte en fin de solution)

- 2- Quelle est la longueur totale du parallèle sur lequel il se trouve ?
 3- Pendant la nuit son bateau dérive vers l'Ouest de 1° en restant sur ce parallèle. Quelle distance a-t-il parcourue en milles ?

Partie B

En revenant à terre il va boire un verre à la taverne et il raconte l'histoire suivante à qui veut bien l'écouter.

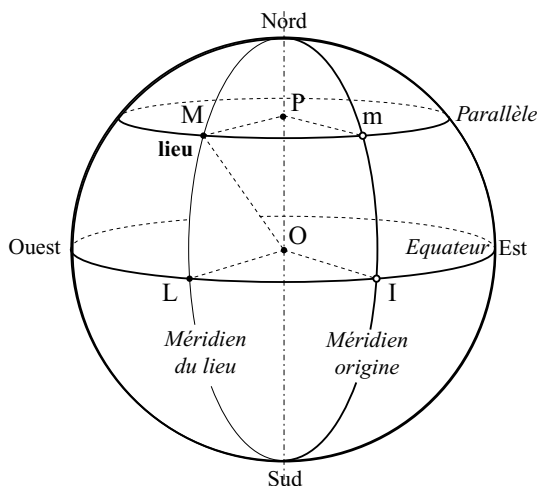
Je me trouvais un jour à Sein, j'ai tracé ma route : 100 milles au nord, 100 milles à l'ouest, 100 milles au sud et enfin encore 100 milles à l'est. Je me suis retrouvé à mon point de départ.

Un marin présent lui dit : c'est impossible !

Et toi qu'en penses-tu ? Justifie ta réponse.

Solution (P.L.H.)

M a pour latitude (Nord) la mesure en degrés et minutes de l'angle $\widehat{LOM}$ et pour longitude (Ouest) celle de l'angle $\widehat{LOI}$.



Partie A

1. Un mille correspond à $1'$ d'arc de grand cercle de la sphère terrestre (par exemple équateur ou méridien).

La latitude du capitaine Haddock a donc diminué de $123'$ ou $2^\circ 3'$ et elle est de $45^\circ 57'$ Nord.

2. Le parallèle sur lequel il se trouve est un cercle de rayon $R \cos \varphi$ donc de longueur $2\pi R \cos \varphi$ où R est le rayon de la sphère terrestre : $2\pi R = 40\,000$ km. Comme $360^\circ = 21\,600'$, l'équateur mesure aussi 21 600 milles ; de $\cos \varphi \approx 0,6953$, on déduit que le parallèle mesure 27 812 km ou 15 018,5 milles.

3. $1^\circ = 60'$. La distance parcourue est donc, en milles, $60 \cos \varphi \approx 41,7$.

Partie B

$100' = 1^\circ 40'$. Le capitaine Haddock part de l'île de Sein de coordonnées 48° Nord, $4^\circ 51'$ Ouest.

Après 100 milles au Nord, donc sur un méridien, il se trouve au point de coordonnées $49^\circ 40'$ Nord, $4^\circ 51'$ Ouest.

Il parcourt ensuite vers l'Ouest 100 milles sur un parallèle à la latitude $49^\circ 40'$ Nord. Comme $\cos(49^\circ 40') \approx 0,6476$, cela correspond à une augmentation de longitude de $\frac{100}{0,6476} \approx 154'$ ou $2^\circ 34'$.

Il se trouve donc au point de coordonnées $49^\circ 40'$ Nord, $7^\circ 25'$ Ouest.

Il suit ensuite, vers le Sud, 100 milles d'un méridien ; sa latitude diminue de $1^\circ 40'$ et ses coordonnées deviennent 48° Nord, $7^\circ 25'$ Ouest.

Sa dernière étape, vers l'Est, s'effectue sur le parallèle 48° Nord. On déduit de $\cos 48^\circ \approx 0,6691$ que la différence de longitude est $\frac{100}{0,6691} \approx 149'$ ou $2^\circ 29'$.

Le point atteint a pour coordonnées 48° Nord, $4^\circ 56'$ Ouest.

On voit qu'il est à $5'$ à l'Ouest de l'île de Sein, soit à $5 \times 0,6691 \approx 3,35$ milles.

Remarque : les données du texte, à moins de 0,5 minute près correspondaient à la précision des mesures au sextant en pleine mer. Avec le GPS, la précision est au moins 100 fois supérieure.