

REIMS

Exercice n° 1

Enoncé

Un puzzle circulaire

On cherche à recouvrir le disque D par des secteurs de type S_2 et des secteurs de type S_3 représentés sur les figures ci-dessous.

Deux recouvrements se déduisant l'un de l'autre par une rotation de centre O sont considérés comme identiques.

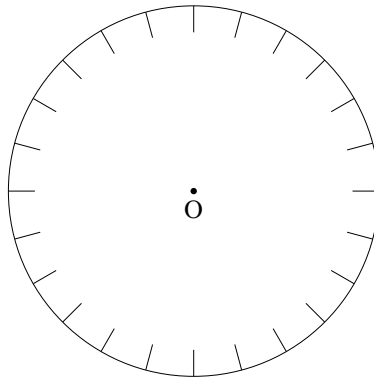


Figure 1 :
Disque D (le cercle est divisé en 24 arcs égaux)

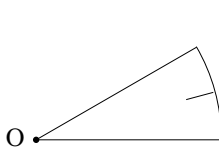


Figure 2
Secteur angulaire de type S_2
(2 arcs égaux)

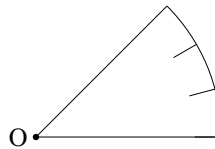


Figure 3
Secteur angulaire de type S_3
(3 arcs égaux)

1. Est-il possible de recouvrir le disque D en utilisant :
 - a) exactement 1 secteur de type S_3 ?
 - b) exactement 3 secteurs de type S_3 ?

2. On utilise exactement 2 secteurs de type S_3 .
- Donner sur un dessin un exemple de recouvrement laissant voir un diamètre du disque D (2 bords rectilignes de secteurs sont sur un même diamètre).
 - Combien existe-t-il de recouvrements différents ne laissant voir aucun diamètre ?
3. On utilise exactement 4 secteurs de type S_3 . Existe-t-il des recouvrements ne laissant voir aucun diamètre ?

Solution (P.L.H.)

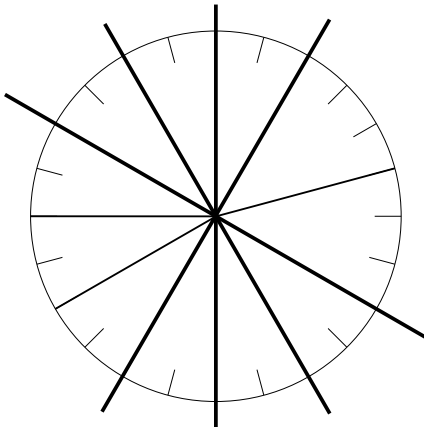
1. Pour recouvrir le disque par p secteurs de type S_2 et q secteurs de type S_3 , il faut que $2p + 3q = 24$, ce qui implique que $3q$ donc q est pairs.

2. Puisqu'on considère deux recouvrements se déduisant l'un de l'autre par une rotation de centre O comme identiques, on peut supposer qu'on commence par un secteur S_3 puis p secteurs S_2 puis le second secteur S_3 et q secteurs S_2 avec $p \geq 0, q \geq 0$ et $2(p + q) = 24 - 6 = 18$ ou $p + q = 9$.

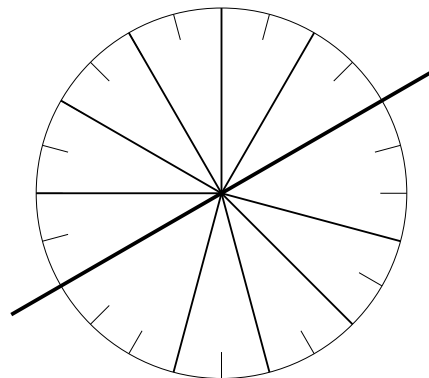
Les rayons bords de secteurs font donc avec le rayon de départ des arcs égaux à : $3, 3 + 2, \dots, 3 + 2p, 6 + 2p, 6 + 2p + 2 \dots 6 + 2p + 2(q - 1)$ (en prenant comme unité 15°).

$3 + 2m$ étant impair tandis que $6 + 2p + 2n$ est pair, la différence entre les deux ne peut être égale à 12.

Par contre on peut avoir $3 + 2m = 3 + 2n + 12$ si $m = n + 6$, ce qui n'est possible que si $p \geq 6$.



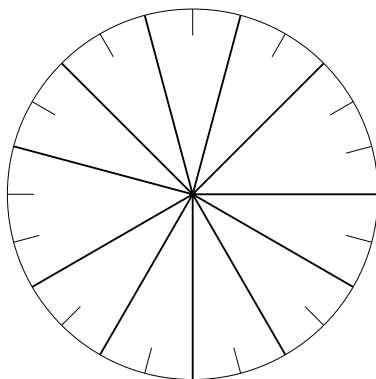
Exemple laissant voir quatre diamètres



Exemple laissant voir un seul diamètre

Pour qu'un recouvrement ne laisse voir aucun diamètre, il faut et il suffit que $0 \leq p \leq 5$ et $0 \leq q \leq 5$. Mais comme $p + q = 9$, on a $p \geq 4$ et $q \geq 4$. On peut donc choisir soit $p = 4$ et $q = 5$ soit $p = 5$ et $q = 4$.

Il existe donc deux recouvrements (symétriques l'un de l'autre) ne laissant voir aucun diamètre.



Exemple de recouvrement
ne laissant voir
aucun diamètre

3. Si on utilise quatre secteurs de type 3, on peut placer entre eux p , q , r , et s secteurs de type 2 avec $p, q, r, s \geq 0$ et $2p + 2q + 2r + 2s = 12$ ou $p + q + r + s = 6$. Les arcs, avec le rayon de départ, mesurent (avec une unité de 15°)

- (1) $3 + 2n$ avec $0 \leq n \leq p$.
- (2) $6 + 2p + 2m$ avec $0 \leq m \leq p$.
- (3) $9 + 2p + 2q + 2t$ avec $0 \leq t \leq r$.
- (4) $12 + 2p + 2q + 2r + 2u$ avec $0 \leq u \leq s$.

Il existe un recouvrement laissant voir un diamètre s'il existe deux arcs dont la mesure diffère de 12.

C'est le cas pour des arcs appartenant au même groupe si l'un des quatre nombres p, q, r ou s est supérieur ou égal à 6 (en fait égal à 6, les trois autres étant nuls).

Pour des raisons de parité, ce ne peut être le cas pour des arcs appartenant aux groupes (i) et (j) si $i - j$ est impair.

Pour les groupes (1) et (3), c'est le cas s'il existe n compris entre 0 et p et t compris entre 0 et r tels que

$$9 + 2(p + q + t) = 12 + 3 + 2n \quad \text{ou} \quad p + q + t - n = 3$$

mais $p + q + t - n$ varie et prend toutes les valeurs entières de q à $p + q + r = 6 - s$. C'est donc le cas si 3 appartient à l'intervalle $[q, 6 - s]$.

Pour les groupes (2) et (4), on trouve de même

$$12 + 6 + 2p + 2m = 12 + 2p + 2q + 2r + 2u$$

ou $q + r + u - m = 3$ avec $0 \leq u \leq s$ et $0 \leq m \leq q$.

$q + r + u - m$ varie de r à $q + r + s = 6 - p$ et c'est le cas si 3 appartient à l'intervalle $[r, 6 - p]$.

Or si 3 n'appartient pas à l'intervalle $[q, 6 - s]$, c'est que

- ou bien $q \geq 4$, mais alors $r \leq 2$, $p \leq 2$ et $6 - p \geq 4$ donc 3 appartient à $[r, 6 - p]$,
- ou bien $6 - s \leq 2$, mais alors $r \leq 2$ et $p \leq 2$ donc $6 - p \geq 4$.

Finalement, il n'existe aucun recouvrement ne laissant voir aucun diamètre.

Exercice n° 2

Enoncé

Un alphabet restreint

On dispose d'un alphabet de 4 lettres (ce qui est peu!) a, b, c , et d .

- 1) Combien de **mots d'au plus 5 lettres** peut-on écrire avec les quatre lettres de cet alphabet ?
- 2) On numérote tous les mots d'au plus 5 lettres dans l'ordre lexicographique⁶ en commençant par $mot_1 = a$, $mot_2 = aa$.
 - Quel est le numéro du mot $dbaad$?
 - Quel est le mot, mot_{516} , qui porte le numéro 516 ?

Solution (P.L.H.)

1. Il y a 4^p mots de p lettres donc

$$4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 = 4 \times \frac{4^5 - 1}{3} = 1364$$

mots d'au plus 5 lettres.

2. Le mot $dbaad$ est précédé

- des $\frac{1364}{4} \times 3 = 1023$ mots commençant par a, b ou c ,
- des $1 + \frac{340}{4} = 1 + 85$ mots, d ou commençant par da ,
- des six mots $db, dba, dbaa, dbaaa, dbaab, dbaac$ soit de $1023 + 86 + 6 = 1115$ mots. Il porte donc le numéro 1116.
- $341 < 516 < 682$ donc mot_{516} commence par la lettre b .

Après ces 341 mots commençant par a viennent

le mot b

les $\frac{340}{4} = 85$ mots commençant par ba

les 85 mots commençant par bb .

Le 513^{ème} mot est donc bc . Il est suivi de $bca, bcaa$

- et enfin de $mot_{516} : bcaaa$.

⁶ordre définissant la succession des mots dans un dictionnaire ainsi, par exemple : $a < aa < ab < baa < bab < baba$.