

LA RÉUNION

Exercice n° 1 (Séries autres que S)

Enoncé

Factorielle

En effectuant le produit de tous les entiers de 1 à 100, on obtient un entier N :

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100.$$

Déterminer le nombre de zéros terminant l'écriture décimale de ce nombre N .

Solution

Expérimentons avec la machine à calculer :

$$\begin{array}{rcl} 1 \times 2 & = & 2 \\ 1 \times 2 \times 3 & = & 6 \\ 1 \times 2 \times 3 \times 4 & = & 24 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times 5 & = & 120 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times 6 & = & 720 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times 7 & = & 5040 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times 8 & = & 40320 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times 9 & = & 362880 \\ 1 \times 2 \times \cdots \times 10 & = & 3628800 \end{array}$$

On constate que l'on ajoute un zéro chaque fois que l'on multiplie par un multiple de 5 ou de 10. Mais 10 est lui-même un multiple de 5.

Comptons alors le nombre de multiples de 5 inférieurs à 100. Il y en a 20 car $100 = 5 \times 20$.

Mais on voit aussi que $100 = 5 \times 5 \times 4$.

Cela signifie qu'en multipliant par 25, c'est-à-dire en passant de $1 \times 2 \times \cdots \times 24$ à $1 \times 2 \times \cdots \times 24 \times 25$, on rajoute deux zéros car $24 \times 25 = 6 \times 4 \times 25 = 600$.

Alors il faut aussi compter les multiples de 25 inférieurs à 100 : il y en a 4, puisque $100 = 4 \times 25$.

Ainsi, on rajoute un zéro pour chaque multiple de 5 et deux zéros pour chaque multiple de 25.

Cela donne $20 + 4 = 24$ chiffres 0 qui terminent le nombre N .

Exercice n° 2 (Séries autres que S)

Enoncé

Un guide solidaire... et solitaire

Un guide doit encadrer deux groupes de randonneurs sur un parcours commun de 20 km.

Les deux groupes marchent à pas réguliers et sans s'arrêter. La vitesse du premier groupe est de 6 km/h et celle du deuxième est de 3 km/h.

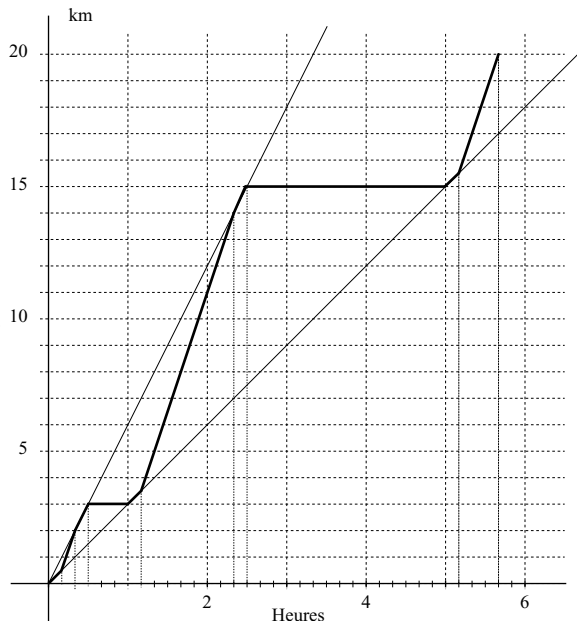
Les deux groupes et le guide débutent la randonnée au même moment. Le guide marche d'abord pendant 10 minutes avec le deuxième groupe, puis il court à la vitesse constante de 9 km/h pour rattraper le premier groupe ; il marche alors pendant 10 minutes avec ce groupe, puis il s'arrête pour attendre le deuxième groupe. Il reproduit ensuite cette même stratégie (10 minutes de marche avec le deuxième groupe, course pour tenter de rejoindre le premier groupe, 10 minutes de marche avec le premier groupe, attente du deuxième groupe) jusqu'à ce qu'il arrive lui-même au terme des 20 km du parcours.

1. Au bout de combien de temps le guide rejoint-il pour la première fois le premier groupe ?
2. Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 1h30 ?
3. Quel temps met-il pour effectuer la totalité du parcours ?

Solution

On représente la distance parcourue, exprimée en kilomètres, en fonction du temps, exprimé en heures, par chacun des deux groupes et par le guide. Les réponses se lisent sur le graphique ci-contre

- Question 1. : 20 minutes
 Question 2. : 6,5 km
 Question 3. : 5 h 40 min.



Exercice n° 3 (Série S)

Énoncé

Factorielle

En effectuant le produit de tous les entiers de 1 à 2008, on obtient un entier N :

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 2007 \times 2008.$$

Déterminer le nombre de zéros terminant l'écriture décimale de ce nombre N .

Solution

Pour retrouver le nombre de zéros dans l'écriture décimale de $2008!$, il faut compter le nombre de fois que $2008!$ est divisible par 10, c'est-à-dire trouver l'entier p tel que

$$2008! = 10^p n,$$

où n est un entier non multiple de 10.

Comme $10 = 2 \times 5$, cela revient à trouver l'entier p tel que $2008! = 5^p m$, où m n'est pas multiple de 5. En effet, il y a plus de multiples de 2 que de multiples de 5 entre 1 et 2008.

Il s'agit donc de compter tous les multiples de 5 et des puissances de 5 parmi les entiers de 1 à 2008. Comme $2008 = 5 \times 401 + 3$, il y a 401 multiples de 5 plus petits que 2008. Parmi eux, certains sont en fait multiples de $25 = 5^2$, comme $2000 = 25 \times 80$, il y en a 80. De même, $2008 = 5^3 \times 16 + 8 = 5^4 \times 3 + 133$, donc il y a 16 multiples de 125 et 3 multiples de 625 inférieurs à 2008. Enfin, $5^5 = 3125 > 2008$, donc il n'y a pas de multiples de 5^5 inférieur à 2008.

En additionnant tous ces nombres, on compte exactement une fois tous les multiples de 5, deux fois les multiples de 25, trois fois ceux de 125 et quatre fois celui de 625, donc on compte exactement toutes les fois qu'un 5 divise $2008!$. Ainsi, le nombre de zéros cherché est

$$401 + 80 + 16 + 3 = 500.$$

Exercice n° 4 (Série S)

Énoncé

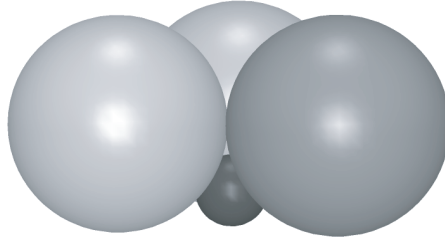
Le cochonnet caché

Sur un plan horizontal, on pose un cochonnet ⁸ de rayon r , puis trois boules

⁸Un cochonnet est une petite boule servant de but à la pétanque.

de pétanque identiques de rayon R .

On constate alors que chaque boule est tangente à la fois au cochonnet et aux deux autres boules.



Déterminer le rapport $\frac{R}{r}$.

Solution

On note A, B et C les centres des boules et O le centre du cochonnet.

On considère d'abord le triangle ABC qui est équilatéral de côté $2R$.

En notant G son centre, on a : $AG = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2R = \frac{2}{\sqrt{3}} R$.

On considère ensuite le triangle GAO qui est rectangle en G.

Le théorème de Pythagore donne : $AG^2 + OG^2 = AO^2$, d'où successivement :

$$\frac{4}{3} R^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2, \quad \frac{4}{3} R^2 - 4Rr = 0, \quad \frac{4}{3} R (R - 3r) = 0.$$

Comme $R \neq 0$, on obtient : $R - 3r = 0$.

D'où : $\frac{R}{r} = 3$