

POITIERS

Exercice n° 1 (Toutes les séries)

Énoncé

Le Veuf Strogonoff

Michel Strogonoff était veuf, mais il était beau.

Pour des raisons obscures, il décida de partir à l'aventure, sans un kopek en poche, à travers les étendues infinies de la Sibérie.

Las, à peine avait-il parcouru une verste³ qu'il rencontra un ermite qui lui dit comme ça : « Michel Strogonoff, donne-moi un rouble, ou tu t'en repentiras ».

– Mais, mon pauvre ermite, je suis trop pauvre, je ne peux pas te donner un rouble.

– Puisque c'est comme ça, répliqua l'ermite, c'est moi qui vais te donner un rouble ! Tiens !

Michel Strogonoff était un peu surpris, mais content, et il reprit sa route, avec un rouble dans la poche. Une verste plus loin, nouvel ermite, même tableau : « Michel Strogonoff, donne-moi deux roubles, ou tu t'en repentiras. »

– Mais, mon pauvre ermite, je suis trop pauvre, je ne peux pas te donner deux roubles.

– Puisque c'est comme ça, répliqua l'ermite, c'est moi qui vais te donner deux roubles ! Tiens !

Michel Strogonoff était toujours un peu surpris, mais de plus en plus content, et il reprit sa route, avec maintenant trois roubles dans la poche. Et à la fin de la troisième verste, ça recommence avec un troisième ermite : « Michel Strogonoff, donne-moi trois roubles, ou tu t'en repentiras. »

– Tiens, mon pauvre ermite, je me réjouis de pouvoir soulager ta misère ! Et Michel Strogonoff lui donna ses trois roubles, et reprit sa route, la bourse vide, à la fois surpris et content, car un rien l'étonnait et c'était un heureux caractère.

Et ça continue comme ça, à la fin de la $n^{\text{ième}}$ verste, un ermite lui demande n roubles. Si Michel Strogonoff les possède, il les lui donne, sinon c'est l'ermite qui lui donne n roubles.

³Unité de longueur utilisée dans la Russie des Tsars, équivalant à un peu plus d'un kilomètre.

1. Après avoir quitté le dixième ermite (donc après 10 verstes), combien Michel Strogonoff possède-t-il ?
2. Après avoir parcouru 2008 verstes et quitté le 2008^{ème} ermite, combien Michel Strogonoff possède-t-il ?
3. Quelle distance (en verstes) Michel Strogonoff devra-t-il parcourir pour détenir pour la première fois la coquette somme de 2008 roubles ?

Solution (P.L.H.)

1. Dressons le tableau de la somme S_n possédée par Michel Strogonoff après avoir quitté le n^{me} ermite ;

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
S_n	1	3	0	4	9	3	10	2	11	1	12	0	...

Il possède donc 1 rouble après avoir quitté le dixième ermite.

2. Considérons la suite n_k des n pour lesquels $S_{n_k} = 0$.

On a $S_{n_k+1} + 1 = n_k + 1$,
 $S_{n_k+1} + 2 = 2n_k + 3$ car $n_k + 1 < n_k + 2$,
 $S_{n_k+1} + 3 = n_k$ car $2n_k + 3 \geq n_k + 3$ et $2n_k + 3 - (n_k + 3) = n_k$,
 $S_{n_k+1} + 4 = 2n_k + 4 \dots S_{n_{k+1}} = 0$.
D'où $S_{n_k+1} + 2p = 2n_k + p + 2$ pour $1 \leq p \leq n_k + 1$
et $S_{n_k+1} + 2p + 1 = n_k + 1 - p$ pour $1 \leq p \leq n_k + 1$
et $n_{k+1} = n_k + 2(n_k + 1) + 1 = 3(n_k + 1)$

ou $\left(n_{k+1} + \frac{3}{2}\right) = 3 \left(n_k + \frac{3}{2}\right)$ avec $n_1 = 3$

d'où $n_k + \frac{3}{2} = 3^{k-1} \left(3 + \frac{3}{2}\right)$ ou $n_k = \frac{3}{2} (3^k - 1)$.

Ainsi les valeurs successives de n_k sont : 3, 12, 39, 120, 363, 1092, 3279.

De $S_{1092} = 0$ et de $2008 = 1092 + 2 \times 458$, on déduit

$$S_{2008} = 2 \times 1092 + 458 + 2 = 2644.$$

Pour $n_k \leq j < n_{k+1}$, S_j est maximum pour

$$j = 3n_k + 2 = n_{k+1} - 1 \quad \text{et} \quad S_{3n_k+2} = 3n_k + 2.$$

Pour $363 \leq j \leq 1092$ on a donc $S_j \leq S_{1092-1} = 1091$ et a fortiori pour $j \leq 363$.

De $S_{1093} = 1093$, on déduit $S_{1094} = 1093 + 1094 = 2187$. Michel Strogonoff détiendra alors pour la première fois au bout de 1094 verstes plus de 2008 roubles.

Exercice n° 2 (Série STG)

Énoncé

Le jeu des baguettes (d'après l'émission télévisée « Fort Boyard »)⁴

Un certain nombre n de baguettes sont alignées entre deux adversaires A et B. Chacun joue à son tour en retirant une, deux ou trois baguettes du jeu. Celui qui reste avec la dernière baguette a perdu. Le joueur A commence.

1. Dans les cas $n = 1, 2, \dots, 10$, donner une stratégie gagnante à ce jeu en précisant à chaque fois à qui elle profite ?
2. Et si le nombre n de baguettes est encore plus grand ?

Solution (P.L.H.)

Si $n = 1$, A perd.

$n = 2, 3, 4$, A retire 1, 2 ou 3 baguettes pour qu'il n'en reste qu'une à B.

$n = 5$, quel que soit le choix de A, B applique la stratégie précédente de A et gagne.

$n = 6, 7, 8$, A se ramène à $n = 5$ et gagne.

$n = 9$, B va se retrouver sur 6, 7 ou 8 et gagne.

$n = 10$, A se ramène à 9 et gagne.

Si $n \equiv 1 \pmod{4}$ A perd sinon B applique la stratégie gagnante.

Sinon A a une stratégie gagnante.

Exercice n° 3 (Série S)

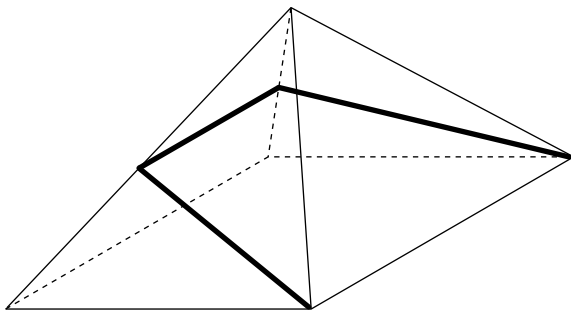
Énoncé

C'est l'heure du goûter ; deux amis, un artiste et un géomètre décident de s'attabler dans une pâtisserie. Ils ne commandent qu'un seul gâteau pour eux deux. Leur choix se porte sur un joli moka au café en forme de pyramide équilatère⁵. Le géomètre s'apprête à le partager équitablement en plaçant son couteau sur le sommet comme il est d'usage. L'artiste arrête alors son geste et lui propose une découpe plus originale : placer la lame sur le milieu d'une arête, parallèle à un côté de la base, puis couper en se dirigeant vers le côté opposé. Le géomètre a des doutes, les parts ne lui semblent pas égales.

⁴NDLR : en fait, il s'agit d'une des très nombreuses variantes du jeu de NIM parfois appelé Marienbad, par référence au film d'Alain Resnais

⁵Pyramide régulière à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux.

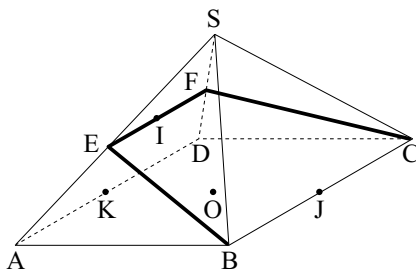
Les arêtes ont toutes pour longueur 10 cm.



1. Calculer le volume exact de cette pyramide équilatère.
2. Quelle fraction du volume de la pyramide équilatère représente effectivement le volume de la part du dessus qui a la forme d'une pyramide à base trapézoïdale ?
3. Plutôt qu'au milieu, en quel point de l'arête faudrait-il placer la lame, pour qu'en procédant de la sorte, le partage soit équitable ?

Solution (P.L.H.)

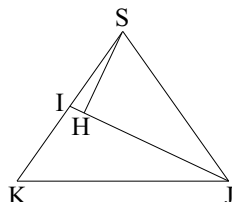
Soit A, B, C, D les sommets du carré de base, S le sommet de la pyramide, J et K les milieux de $[BC]$ et $[AD]$.



1. Le carré ABCD, base de la pyramide SABCD a pour aire 100 cm^2 . La hauteur $[SO]$ abaissée de S sur le centre O du carré ABCD a pour longueur h telle que $h^2 + 5^2 = SJ^2 = SB^2 - BJ^2 = 100 - 25 = 75$, d'où $h^2 = 75 - 25 = 50$ et $h = 5\sqrt{2}$.

Le volume de la pyramide est donc $\frac{500\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^3$.

2. et 3.



Soit E un point du segment $[AS]$, (EF) parallèle à (AD) et F sur (DS) .
Soit I le milieu de $[EF]$.

Posons $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SD} = \frac{SI}{SK} = \frac{EF}{AD} = x$ avec $0 \leq x \leq 1$.

Le plan SIJ est plan médiateur à la fois de $[EF]$, $[AD]$ et $[BC]$ et il est perpendiculaire au plan EFCB. La hauteur (SH) de la pyramide SEFCB est dans ce plan et c'est aussi la hauteur du triangle SIJ. Le volume de cette pyramide est donc égal à $\frac{1}{3} SH \times IJ \times \frac{EF + BC}{2}$.

Mais $\frac{1}{2} SH \times IJ$ est l'aire du triangle SIJ égale aussi à la moitié du produit de

SI par la hauteur issue de J. On en déduit $\frac{\text{aire}SIJ}{\text{aire}SKJ} = \frac{SI}{SK} = x$

Par ailleurs $x = \frac{EF}{BC}$ donc $\frac{\text{vol}(SEFCB)}{\text{vol}(SADCB)} = \frac{x(x+1)}{2}$.

Pour $x = \frac{1}{2}$, $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{2}$,

par contre $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x^2 + x + 1 = 0$ qui, avec les conditions

$0 \leq x \leq 1$ donne $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, inverse du nombre d'or ($x \approx 0,618$).