

PARIS

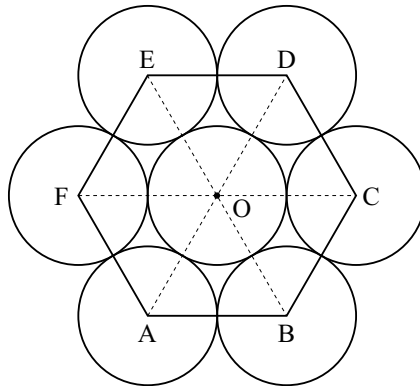
Exercice n° 1 (Séries autres que S)

Enoncé

Sur un espace parfaitement plan d'un jardin se trouve une sphère S de rayon R soutenant une fontaine. L'architecte paysagiste se demande s'il est possible de poser des sphères de même rayon R tout autour de S de telle sorte que les nouvelles sphères soient en contact deux à deux et toutes avec S .

Solution (P.L.H.)

Dans le plan horizontal qui contient le centre O de la sphère S , on construit un hexagone régulier de centre O et de côté $2R$, $ABCDEF$, puis les six sphères de rayon R et de centre A, B, C, D, E, F qui sont bien tangentes deux à deux et toutes en contact avec S .



Exercice n° 2 (Séries autres que S)

Enoncé

On pourra utiliser le résultat suivant que l'on admettra : si n est un entier naturel non nul, la somme de tous les entiers de 1 à n est égale à

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Pendant une journée, un radio réveil à affichage digital donne l'heure toutes les minutes de 00 :00 à 23 :59.

On remplace chacune des heures affichées par un nombre de quatre chiffres (exemple : 13 :57 est remplacé par le nombre 1357) et on effectue la somme de tous les nombres obtenus au cours d'une journée.

Quelle est cette somme ?

Solution (P.L.H.)

Il y a 24 heures dans une journée et 60 minutes dans une heure. Par ailleurs les nombres correspondant à un affichage sont tous distincts.

La somme de ces nombres est donc

$$\begin{aligned} S &= 24(1 + \dots + 59) + 60(1 + \dots + 23) \\ &= 24 \times \frac{59 \times 60}{2} + 60 \times \frac{23 \times 24}{2} = 24 \times 30 \times 82 = 5\,9040. \end{aligned}$$

Exercice n° 3 (Série S)

Enoncé

À partir d'une position choisie comme origine, une personne effectue une suite de déplacements le long d'une droite fixe, assimilée à la droite réelle.

Pour $k = 1, 2, 3, \dots$, le k^e déplacement est un trajet de longueur k vers la droite ou vers la gauche au hasard.

1. Montrer que la personne peut atteindre le point d'abscisse 12.
2. Montrer que la personne peut atteindre n'importe quel point situé à une distance entière de l'origine.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $m(n)$ le nombre minimal de déplacements effectués pour atteindre le point d'abscisse n .

- a. Montrer qu'il existe un déplacement simple qui permet d'établir l'inégalité :

$$\frac{m(n)}{\sqrt{n}} > \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- b. Démontrer que :

$$\frac{m(n)}{\sqrt{n}} < \sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m(n)}{\sqrt{n}}$.

Solution (P.L.H.)

1. On a par exemple

$12 = 1+2-3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16-17+18-19+20$,
mais aussi $12 = 1-2+3+4+5-6+7$.

2. En choisissant alternativement un trajet à gauche puis un à droite, on obtient à l'étape $2k$:

$$-1+2-3+\cdots+2k = (-1+2) + (-3+4) + \cdots + (-(2k-1)+2k) = k$$

et à l'étape $2k+1$: $k-(2k+1) = -k-1$

donc, de proche en proche, n'importe quel point situé à une distance entière de l'origine.

3.a) En k déplacements on n'atteint qu'un des points de l'intervalle

$$\left[\frac{-k(k+1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2} \right].$$

On a donc $m(n) > k$ si $n > \frac{k(k+1)}{2}$. On peut se limiter à $n \geq 0$. A tout n donné, associons l'unique k tel que

$$\frac{k(k+1)}{2} < n \leq \frac{(k+1)(k+2)}{2} < \frac{(k+2)^2}{2}$$

alors $m(n) \geq k+1 > \sqrt{2n}-1$ et $\frac{m(n)}{\sqrt{n}} > \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3.b) Partons du cas où l'on effectue tous les déplacements vers la droite. On atteint ainsi le point d'abscisse $\frac{k(k+1)}{2}$.

En changeant le i^{me} déplacement on atteint le point d'abscisse $\frac{k(k+1)}{2} - 2i$ et, si l'on change les déplacements de rang $i_1, i_2, \dots, i_r$ le point d'abscisse

$$\frac{k(k+1)}{2} - 2 \sum_{s=1}^r i_s.$$

Or $\sum_{s=1}^r i_s$ prend toutes les valeurs entières entre 0 et $\frac{k(k+1)}{2}$.

Ainsi les points dont l'abscisse est, en valeur absolue, inférieure à $\frac{k(k+1)}{2}$ et de même parité sont accessibles en k déplacements.

Pour les points dont l'abscisse diffère de $\frac{k(k+1)}{2}$ d'un nombre impair, il faut trouver le plus petit j supérieur à k tel que $\frac{j(j+1)}{2}$ diffère de $\frac{k(k+1)}{2}$ d'un nombre pair. Ce peut être $k+1$ ou $k+2$ car les nombres $\frac{i(i+1)}{2}$ sont deux

par deux alternativement pairs ou impairs.

Ainsi toute abscisse comprise, en valeur absolue, entre 0 et $\frac{k(k+1)}{2}$ peut être atteinte en au plus $k+2$ déplacements, donc $n \leq \frac{k(k+1)}{2}$ implique $m(n) \leq k+2$.

Si nous choisissons k tel que

$$\frac{(k-1)k}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

alors $(k-1)^2 < 2n$ et $m(n) \leq k+2 < \sqrt{2n} + 3$ ou

$$\frac{m(n)}{\sqrt{n}} < \sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Finalement $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(n)}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$ par le théorème des gendarmes.

Exercice n° 4 (Série S)

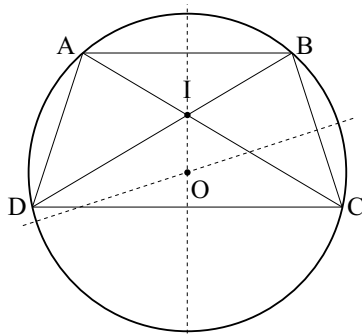
Enoncé

ABCD est un trapèze ($(AB) \parallel (CD)$). Les quatre points appartiennent à un cercle de rayon 1. On pose $d = |AB - CD|$, on suppose $d > 0$. On appelle h la distance entre le centre O du cercle et le point d'intersection I des droites (AC) et (BD) .

1. Montrer que $h \neq 0$.
2. Déterminer, si elle existe, la valeur maximale de $\frac{d}{h}$ et décrire les cas où ce maximum est atteint. (On pourra se placer dans un repère orthonormé d'origine O.)

Solution (P.L.H.)

1. La cocyclicité de ABCD implique que les médiatrices de (AB) , (BC) , (CD) et (DA) se coupent en O. Celles de (AB) et (CD) ayant même direction et un point commun sont confondues et axes de symétrie de la figure. Le trapèze est donc isocèle et réciproquement, tout trapèze isocèle est inscrit dans un cercle dont le centre s'obtient comme intersection des médiatrices de (AB) et (BC) .



Si h était nul, ABCD dont les diagonales se couperaient en leur milieu serait un parallélogramme et plus précisément un rectangle contrairement à l'hypothèse $d > 0$.

2. Choisissons un repère orthonormé d'origine O et dont les axes sont parallèles et perpendiculaire à (AB) et (CD) .

Appelons $(-\cos \varphi, \sin \varphi)$, $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, $(\cos \theta, \sin \theta)$, $(-\cos \theta, \sin \theta)$ les coordonnées de A, B, C, D et $(0, y)$ celles de I (on se limite à $\frac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$).

I étant sur (AC) et sur (BD) , on a

$$\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi - y} = \frac{-\cos \theta}{\sin \theta - y} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta}{\cos \varphi + \cos \theta}.$$

$$\text{Mais } \cos \varphi + \cos \theta = 2 \cos \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right)$$

$$\text{et } \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta = \sin(\varphi + \theta) = 2 \sin \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right)$$

d'où

$$y = \frac{\sin \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right)} \quad \text{et} \quad k = \left| \frac{\sin \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right)} \right|$$

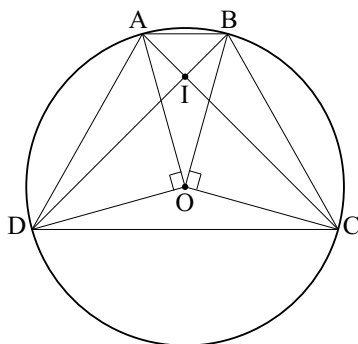
Tandis que $d = 2|\cos \varphi - \cos \theta|$

$$= 2 \left| \sin \left(\frac{\varphi + \theta}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right) \right|$$

$$\text{donc} \quad \frac{d}{h} = 2 \left| \sin \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi - \theta}{2} \right) \right| = |\sin(\varphi - \theta)|$$

$\varphi - \theta$ variant de $-\pi$ à π , $|\sin(\varphi - \theta)|$ est maximum et égal à 1 quand

$\varphi - \theta$ est égal à $\frac{-\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire quand $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOD}$ sont droits.



Les trapèzes isocèles ayant cette propriété sont donc tels que $AD^2 = BC^2 = 2$. Mais on voit aussi apparaître deux autres angles droits et deux autres triangles rectangles isocèles sur la figure. En effet, l'angle inscrit $\widehat{ABI}$ est la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOD}$ donc mesure 45° , comme $\widehat{IAB}$, $\widehat{IDC}$ et $\widehat{ICD}$.

Solution (A. Guillemot)

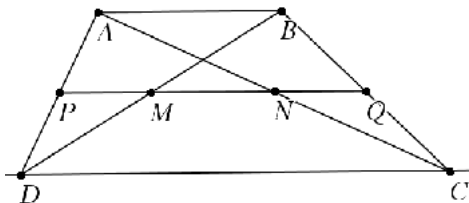
(d'après une idée de France et Michel Villiaumey).

1) Si $h = 0$, le trapèze $ABCD$ a pour diagonales deux diamètres $[AC]$ et $[BD]$, c'est donc un rectangle.

Dans ce cas d est égal à 0 ce qui contredit l'hypothèse.

2a)-Commençons d'abord par matérialiser la longueur d à partir d'un segment de la figure.

Soit $ABCD$ un trapèze, P , M et N les milieux respectifs de $[AD]$, $[BD]$ et $[AC]$.



(MP) est parallèle à (AB) et (PN)

est parallèle à (DC) , donc les points P , M et N sont alignés.

$AB = 2PM$ et $DC = 2PN$ donc $DC - AB = 2MN$

Conclusion : Dans un trapèze, le segment joignant les milieux des deux diagonales mesure la moitié de la différence des deux côtés parallèles.

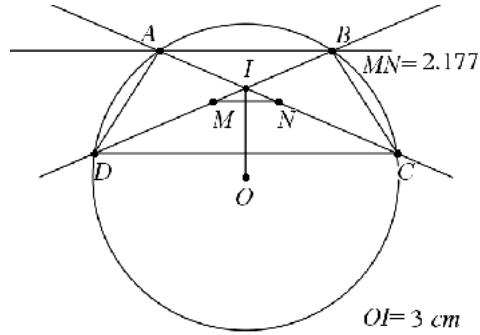
b- Approche calculatrice (en utilisant le module de géométrie de la TI-Nspire)

Soit A un point mobile du cercle de centre O . I un point fixe à l'intérieur du cercle. Construisons le trapèze $ABCD$ inscrit dans le cercle tel que ses diagonales se coupent en I . (AB) et (CD) sont perpendiculaires à (OI)

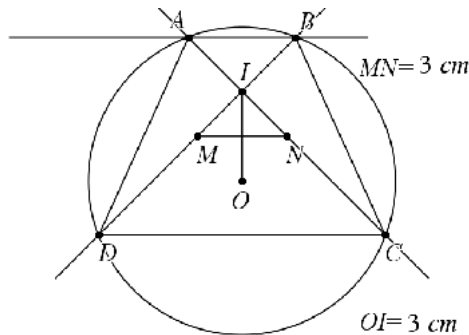
M et N sont les milieux de $[BD]$ et de $[AC]$.

$h = OI$ et $d = 2MN$.

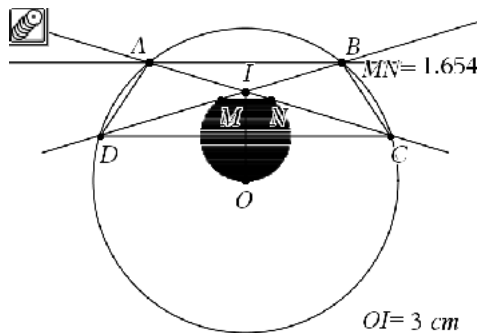
Le rapport d/h sera maximum quand MN sera maximum.



En déplaçant le point A sur le cercle, il semble que le maximum de MN soit atteint quand $MN = OI$ et dans ce cas $OMIN$ semble être un carré.



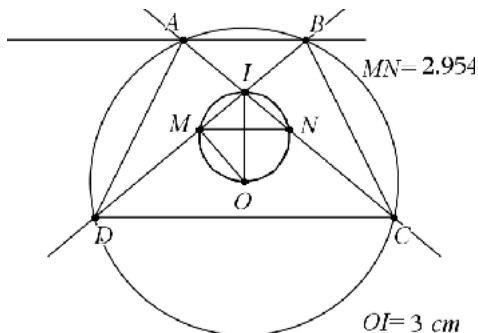
Demandons le lieu de $[MN]$ quand A parcourt le cercle.



Il semble que le segment $[MN]$ soit une corde du cercle de diamètre $[OI]$, donc que la longueur MN soit au plus égale à OI .

c- Démonstration.

Reprenons la figure précédente.



M est le milieu de $[BD]$ et OBD est un triangle isocèle de sommet O , donc (OM) est perpendiculaire à (BD) .

Le triangle OMI est rectangle en M donc M est sur le cercle (Γ) de diamètre $[OI]$.

De la même manière N est sur le cercle de diamètre $[OI]$.

La distance MN sera maximale quand $[MN]$ sera un diamètre de (Γ) et dans ce cas le rapport d/h vaudra 2.

Les diagonales de $ABCD$ seront alors perpendiculaires.

Algorithme de construction d'une figure permettant d'avoir $d/h = 2$.

Soit un cercle (Γ') de centre O .

I un point à l'intérieur du cercle et (Γ) le cercle de diamètre $[OI]$.

Soit $[MN]$ le diamètre de (Γ) perpendiculaire à (OI) .

Les droites (IM) et (IN) coupent le cercle (Γ') en quatre points qui sont les sommets du trapèze recherché.