

ORLÉANS

Exercice n° 1

Énoncé

Le bon ordre

Les égalités proposées ci-après définissent trois nombres réels A , B et C . Pour faciliter la lecture, il est précisé que chacune des écritures décimales qui apparaissent comporte neuf zéros après la virgule.

$$A = \frac{1,0000000001}{2,0000000001 - (1,0000000001)^2} ;$$

$$B = \frac{1,0000000001}{2,0000000003 - (1,0000000002)^2} ;$$

$$C = \frac{1,0000000002}{2,0000000002 - (1,0000000001)^2}.$$

Parmi ces trois nombres réels A , B et C , lequel est le plus grand ? Lequel est le plus petit ?

Solution

Avec la calculatrice, en ne mettant qu'un seul zéro après la virgule, on obtient $C < A < B$.

On pose $x = 10^{-10}$. Ainsi :

$$A = \frac{1+x}{2+x-(1+x)^2}, \quad B = \frac{1+x}{2+3x-(1+2x)^2} \quad \text{et} \quad C = \frac{1+2x}{2+2x-(1+x)^2}.$$

$$\text{On calcule } A - C = \frac{2x^2 + x^3}{(1-x-x^2)(1-x^2)} > 0$$

$$\text{On calcule } B - A = \frac{3x^2 + 3x^3}{(1-x-4x^2)(1-x-x^2)} > 0$$

Donc $C < A < B$.

Exercice n° 2

Enoncé

Des cercles au carré

Dans le plan, on considère un carré $ABCD$. Un point E est placé à l'intérieur du carré.

On désigne par F le point d'intersection du segment $[AB]$ et de la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point E .

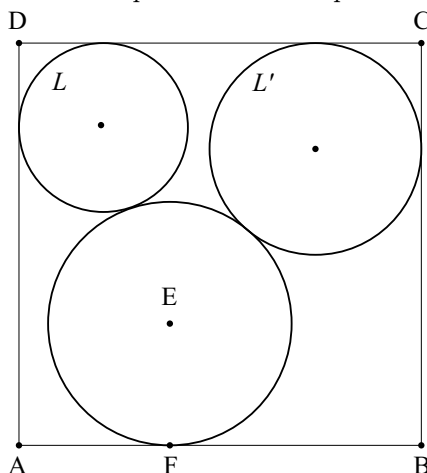
On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre E qui est tangent en F à la droite (AB) . On supposera $AB = 1$ pour les calculs, et on posera $x = AF$ et $y = FE$.

1. Faire une figure et hachurer l'ensemble des points E pour lesquels le cercle $\mathcal{C}$ est entièrement situé à l'intérieur du carré $ABCD$. Justifier votre choix par un raisonnement.

Dans la suite, on supposera la condition précédente réalisée. On considère alors, comme sur la figure ci-dessous, les deux cercles L et L' intérieurs également au carré $ABCD$ et définis de la façon suivante :

- le cercle L est tangent à la droite (DC) , tangent à la droite (AD) et tangent extérieurement au cercle $\mathcal{C}$; le centre du cercle L appartient au segment $[BD]$;
- le cercle L' est tangent à la droite (DC) , tangent à la droite (BC) et tangent extérieurement au cercle $\mathcal{C}$; le centre du cercle L' appartient au segment $[AC]$.

On admettra que de tels cercles existent et on ne cherchera pas à les construire, hormis dans le cas particulier de la question 4. b.



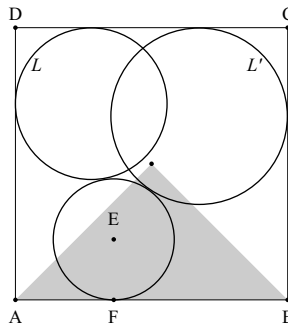
On note r et r' les rayons respectifs des cercles L et L' .

2. Déterminer l'ensemble des points E tels que $r = r'$.
3. Existe-t-il une position du point E telle que les cercles L, L' et $\mathcal{C}$ aient le même rayon ? Si oui laquelle ?
4. a) Démontrer qu'il existe une position du point E pour que $r = r'$ et que, de plus, les cercles L et L' soient tangents extérieurement.
b) Proposer dans ce cas une construction du point E et des trois cercles, en utilisant exclusivement une règle non graduée et un compas.

Solution

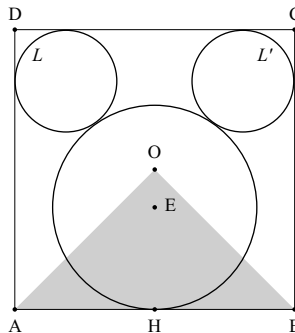
1. Les contraintes imposent

- a) Le point E est à l'intérieur du carré $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$,
- b) le symétrique de F par rapport à E est à l'intérieur du carré $2y \leq 1$,
- c) le diamètre de $\mathcal{C}$ parallèle à (AB) est à l'intérieur du carré $0 \leq x - y$ et $x + y \leq 1$, d'où graphiquement :



2. Notons G et G' les centres respectifs de L et de L' .

Si $r = r'$, E appartient à la médiatrice de $[GG']$ qui est aussi celle de $[DC]$. Réciproquement, si E appartient au segment $[OH]$ indiqué sur la figure, la figure admet la droite (OH) comme axe de symétrie et donc $r = r'$.



3. On se trouve donc dans la configuration précédente et l'on doit résoudre $r = y$.

Dans le triangle isocèle EGG' , les côtés ont pour longueur $1 - 2r$, $r + y$, $r + y$

et la hauteur issue de E mesure $1 - y - r$.

On en déduit l'équation $(1 - y - r)^2 + (0,5 - r)^2 = (r + y)^2$ donc la relation liant y et r est

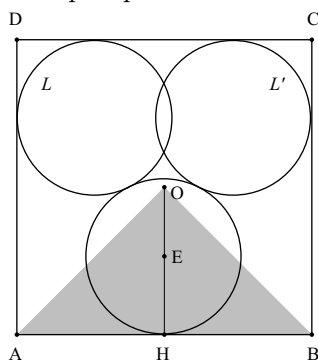
$$\begin{aligned} (0,5 - r)^2 &= (r + y)^2 - (1 - y - r)^2 \\ 0,25 - r + r^2 &= 2r + 2y - 1 \end{aligned}$$

Donc $y = \frac{5}{8} - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}r^2$

D'où $y = r \Leftrightarrow r^2 - 5r + \frac{5}{4} = 0 : \Delta = 20$.

Les solutions sont donc $y = \frac{5 - \sqrt{20}}{2} \approx 0,26393$ ou $y = \frac{5 + \sqrt{20}}{2} \approx 4,7361$.

Seule la première est à retenir puisque l'on doit avoir $0 \leq y \leq 0,5$.



4. On doit donc avoir $r = \frac{1}{4}$ d'où $y = \frac{9}{32} = 0,28125$.