

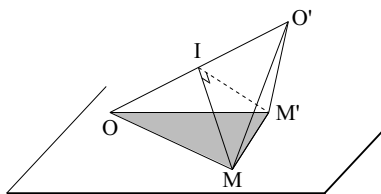
NICE

Exercice n° 1 (Série S)

Énoncé

Des pliages version 3

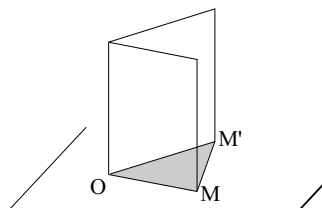
1) Marie plie une feuille de papier carrée de côté 30 cm suivant une diagonale, avec un angle d'ouverture de 90° et elle pose ce pliage sur table et s'intéresse au triangle découpé sur la table qui s'appelle « le polygone de sustentation ».



(voir le dessin : I est le milieu de $[OO']$ et l'angle $\widehat{MIM'}$ est droit et le polygone de sustentation est OMM').

Quelle est l'aire du polygone de sustentation obtenu ?

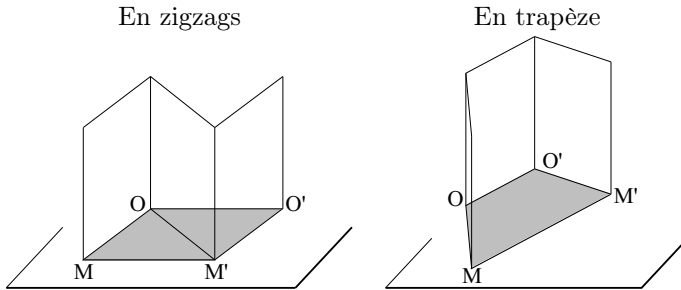
2) Marie plie maintenant cette feuille de papier suivant la médiatrice d'un côté. Elle la pose debout sur une table et s'intéresse au polygone de sustentation. Sur la figure, le polygone de sustentation est le triangle MOM' .



a) Quelle est l'aire du polygone de sustentation si l'angle d'ouverture est 60° ?

b) Elle cherche le polygone de sustentation ayant l'aire la plus grande possible. Si on appelle α l'angle d'ouverture, déterminer l'aire de MOM' en fonction de α puis déterminer α pour obtenir l'aire maximale, et donner l'aire obtenue. (on pourra travailler avec l'angle moitié $\frac{\alpha}{2}$, et on rappelle que $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$).

3) Marie plie à nouveau cette feuille de papier carrée en trois parties de largeur égale. Elle a deux possibilités de l'ouvrir debout :



Déterminer, dans chaque cas, les angles d'ouverture pour lesquels le polygone de sustentation a l'aire maximale et déterminer l'aire obtenue.

On étudiera seulement les cas suivants :

zigzag : $\widehat{MOM'} = \widehat{OM'O'}$

trapèze : $\widehat{MOO'} = \widehat{OO'M'}$.

Solution (P.L.H.)

1. Le triangle IMM' est isocèle rectangle et on a

$$IM = IM' = IO = IO' = 15\sqrt{2}$$

D'où : $MM' = IM\sqrt{2} = 2 \times 15 = 30$.

Le triangle OMM' est donc équilatéral et ses côtés mesurent 30 cm ; il a donc pour aire $30^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

2. a) On a, cette fois, $OM = OM' = 15$ et $\widehat{MOM'} = 60^\circ$; MOM' est donc équilatéral de côté 15 et son aire est $15^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{225\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$.

b) L'aire de OMM' est égale à $OM^2 \times \cos \frac{\alpha}{2} \times \sin \frac{\alpha}{2}$ produit la hauteur $OM \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ par la demie base $OM \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$.

$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2}$ est, sur l'intervalle $(0 ; 180^\circ)$, maximum et égal à $\frac{1}{2}$ pour $\alpha = 90^\circ$. L'aire obtenue est $\frac{15^2}{2} = \frac{225}{2} \text{ cm}^2$.

3. En zigzags et en se limitant au cas $\widehat{MOM'} = \widehat{OM'O'} = \alpha$, on a cette fois : $OM = OM' = M'O' = 10$ et l'aire est $2OM^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ qui est maximum et égale à 100 cm^2 pour $\alpha = 90^\circ$.

En trapèze :

Si on se limite à $\widehat{MOO'} = \widehat{OO'M'} = \alpha$, le trapèze MOO'M' a pour aire le produit de la hauteur $10 \cdot \sin \alpha$ par la demie somme des bases :

$$\frac{1}{2}(10 + 10 - 2 \cdot 10 \cdot \cos \alpha) = 10(1 - \cos \alpha), \text{ soit } 100 \cdot \sin \alpha(1 - \cos \alpha) \text{ cm}^2$$

La fonction $\alpha \mapsto \sin \alpha (1 - \cos \alpha)$ a pour dérivée $\cos \alpha (1 - \cos \alpha) + \sin^2 \alpha = \cos \alpha (1 - \cos \alpha) + 1 - \cos^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)(1 + 2 \cos \alpha)$.
 La fonction passe par un maximum pour $2 \cos \alpha = -1$ ou $\alpha = 120^\circ$.
 L'aire du polygone de sustentation est alors

$$100 \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = 100 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

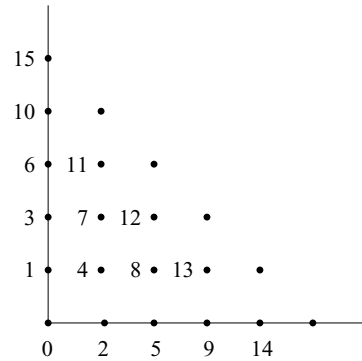
Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Un comptage de points (à rapprocher de Strasbourg - Ex. 1)

On décide de numérotiser les points du plan, à coordonnées entières, de la façon suivante :

au point $(0; 0)$ on associe le nombre 0,
 au point $(1; 0)$ on associe le nombre 1,
 au point $(0; 1)$ on associe le nombre 2,
 au point $(2; 0)$ on associe le nombre 3,
 au point $(1; 1)$ on associe le nombre 4,
 etc. comme l'indique la figure ci-contre.



- En continuant de cette façon :
 - quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(3; 4)$?
 - quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(0; 50)$?
 - puis au point de coordonnées $(0; 50)$?
 - Soit n un nombre entier naturel non nul :
 - quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(0; n)$?
 - Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(n; 0)$?
 - Soit x et y deux entiers naturels tels que $x + y = n$. Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(x; y)$?
 - De façon générale, quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(x; y)$ avec x et y entiers naturels non nuls ?
 - Réciproquement, à quelles coordonnées est associé le nombre 2008 ?
- On rappelle que pour n entier naturel, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution (P.L.H.)

Cf. page 137.

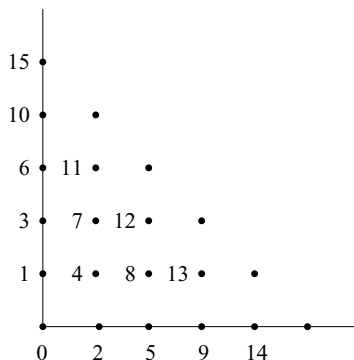
Exercice n° 3 (Séries L, STG, F11)

Enoncé

Un comptage de points (à rapprocher de Strasbourg - Ex. 1)

On décide de numérotar les points du plan, à coordonnées entières, de la façon suivante :

au point $(0; 0)$ on associe le nombre 0,
 au point $(1; 0)$ on associe le nombre 1,
 au point $(0; 1)$ on associe le nombre 2,
 au point $(2; 0)$ on associe le nombre 3,
 au point $(1; 1)$ on associe le nombre 4,
 etc. comme l'indique la figure ci-contre.



1. En continuant de cette façon :

- Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(3; 1)$?
- Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(3; 4)$?

2. Les axes de coordonnées :

- On s'intéresse à la suite des nombres obtenus en calculant la différences de deux nombres consécutifs de l'axe des abscisses $(2 - 0$ puis $5 - 2, \dots)$.
Que pouvez-vous en dire ?
- Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(50; 0)$?
- Existe-t-il un point de l'axe des abscisses qui soit associé au nombre 209 ?
- On s'intéresse à la suite des nombres obtenus en calculant la différence de deux nombres consécutifs de l'axe des ordonnées $(1 - 0, 3 - 1, \dots)$.
Que pouvez-vous en dire ?
- Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(0; 50)$?
- Existe-t-il un point de l'axe des ordonnées qui soit associé au nombre 210 ?

3. Une oblique :

- On s'intéresse à la demi-droite passant par les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(2; 2)$.
Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(20; 20)$?

Généralisation :

4. Soit n un nombre entier naturel non nul :

- Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(0; n)$?

b) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(n; 0)$?

(on rappelle que pour n entier naturel, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$).

5. A quel point est associé le nombre 2008 ?

Solution (P.L.H.)

Les deux versions de ce sujet étant destinées, la première aux élèves de la série S, la seconde aux élèves de L, STG et F11, nous répondrons à la fois ci-dessous aux questions des deux versions.

Remarquons que le sujet, contrairement aux habitudes, donnait les coordonnées d'un point dans l'ordre (ordonnée, abscisse) et cela a pu gêner certains élèves.

1. a) On associe au point $(3; 1)$ le nombre 11.

b) On associe au point $(3; 4)$ le nombre 2.

c) Sur l'axe des ordonnées on trouve successivement :

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1 \\ 1 + 2 & = & 3 \\ 1 + 2 + 3 & = & 6 \\ \dots & = & \dots \\ 1 + 2 + \dots + 50 & = & \frac{50 \times 51}{2} = 25 \times 51 = 1275 \end{array}$$

Le nombre 1275 est donc associé au point $(50; 0)$

On a $210 = \frac{20 \times 21}{2}$ donc le point $(20; 0)$ est associé au nombre 210.

d) Sur l'axe des abscisses, on trouve successivement

$$\begin{array}{rcl} 0 + 2 & = & 2 \\ 0 + 2 + 3 & = & 5 \\ 0 + 2 + 3 + 4 & = & 9 \\ 0 + 2 + \dots + 50 & = & \frac{50 \times 51}{2} - 1 = 25 \times 51 - 1 = 1274 \end{array}$$

On a $209 = \frac{20 \times 21}{2} - 1$ donc le point $(0; 20)$ est associé au nombre 209.

e) Au point $(40; 0)$ est associé le nombre $\frac{40 \times 41}{2}$.

On redescend au point $(20; 20)$ en ajoutant 20 : au point $(20; 20)$ est associé $20 \times 41 + 20 = 20 \times 42 = 840$.

2.a) À $(0; n)$ on associe $2 + 3 + \dots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n^2 + 3n}{2}$.

b) À $(n; 0)$ on associe $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. Si $x + y = n$, on part du point $(n; 0)$ auquel est associé $\frac{n(n+1)}{2}$ et on passe à $(2; y)$ en ajoutant y ; à $(x; y)$ est donc associé $\frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$.

4. On cherche $x + y = n$ et y tels que $\frac{n(n+1)}{2} + y = 2008$ avec $0 \leq y \leq n$.

On a $\frac{62 \times 63}{2} = 1953$ et $\frac{63 \times 64}{2} = 2016$ d'où $n = 62$ et $y = 2008 - 1953 = 55$.

D'où $x = 62 - 55 = 7$.

2008 est associé au point $(7; 55)$.

Exercice n° 4 (Séries L, STG, F11)

Enoncé

Ce n'est pas gagné !

Je joue à pile ou face avec les règles suivantes :

Je commence avec une mise de $a = 1\text{€}$ et je ne m'arrête de jouer que dans les deux cas suivants :

– si je n'ai plus d'argent, alors j'ai perdu

ou

– si j'ai $b = 5\text{€}$ et là j'ai gagné.

A) A chaque lancer : si j'ai deux euros, je les mise, et si j'ai plus, je mise la différence à 5 € et :

- si j'obtiens face, je récupère le double de ma mise,
- si j'obtiens pile, je perds ma mise.

On appellera « avoir » la somme possédée après un lancer. On note (FPFF) la suite de résultats Face, Pile, Face, Face.

1) Je commence une partie avec (FP). Quel est mon avoir ?

2) Même question avec (FFPP).

3) Quel est le nombre minimum de lancers pour gagner ?

4) Au bout de 2008 lancers, je n'ai toujours pas gagné ni perdu. Quel est mon avoir ?

B) On change les règles en prenant $a = 1\text{€}$ et $b = 9\text{€}$ et à chaque lancer, si j'ai entre un et quatre euros, je les mise, et si j'ai plus, je mise la différence à 9€.

1) Je commence une partie avec (FP). Quel est mon avoir ?

2) Donner une suite de résultats pour laquelle l'avoir revient à 1€.

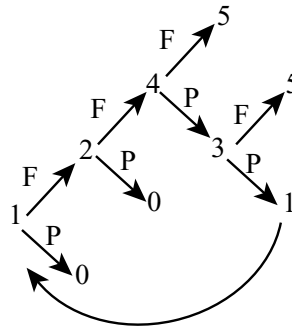
3) Au bout de 2008 lancers, je n'ai toujours pas gagné ni perdu. Quel est mon avoir ?

C) J'arrive dans un lieu où une partie de ce type est en train de se dérouler, avec $a = 1\text{€}$ et b inconnu. Pendant ma présence, les avoirs successifs du joueur sont 10, 20 et 5.

- 1) Combien vaut b ?
- 2) A partir de ce moment (avoir de 5 euros), quels sont les avoirs possibles du joueur dans cette partie ?

Solution (P.L.H.)

A. Traçons l'arbre du jeu en précisant la fortune du joueur à chaque sommet. Les flèches montantes correspondent à Face, les descendantes à Pile.

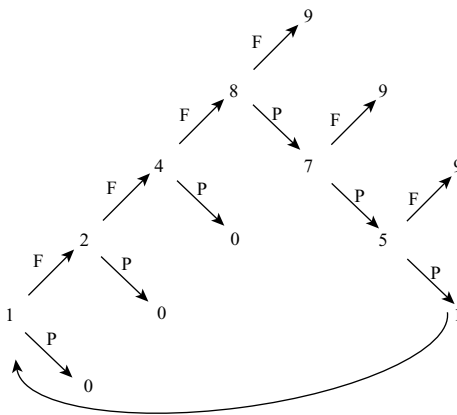


Arrivé à 5 ou 0, on s'arrête ; arrivé à 1, on recommence à parcourir l'arbre de racine 1.

- 1) La suite FP m'amène à l'avoir 0.
- 2) La suite FFPP me ramène à l'avoir 1.
- 3) Pour atteindre 5 et gagner, il me faut au minimum 3 lancers (FFF).
- 4) Si je n'ai ni gagné ni perdu, c'est que je parcours la branche FFPP.

Je suis donc dans le même état tous les quatre lancers ; comme 2008 est divisible par 4, je suis dans l'état de départ avec un avoir de 1.

B. L'arbre devient



- 1) Après FP mon avoir est nul.
- 2) FFFPPP me ramène à 1.
- 3) Je suis dans le même état tous les six lancers : $2008 = 2004 + 4$.

En 2004 je reviens à 1 et en 4 lancers je passe à 7. Mon avoir est donc de 7 au bout de 2008 lancers.

