

NANCY–METZ

Exercice n° 1 (Séries S et STI)

Enoncé

Plus petit chiffre

On note $p(n)$ le plus petit chiffre figurant dans l'écriture décimale du nombre entier naturel n .

Ainsi, $p(306) = 0$, $p(4\,512) = 1$ et $p(798) = 7$.

- Calculer la somme $S_2 = p(10) + p(11) + p(12) + \cdots + p(98) + p(99)$.
- Montrer qu'il y a 9^3 nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 1 à 9.
 - Combien y a-t-il de nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 2 à 9?
 - En déduire qu'il y a $9^3 - 8^3$ nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 1$.
- Combien y a-t-il de nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 2$.

Variante pour les autres séries : Montrer qu'il y a $8^3 - 7^3$ nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 2$.

- Calculer la somme $S_3 = p(100) + p(101) + p(102) + \cdots + p(998) + p(999)$.

Solution

- Le tableau suivant nous donne tous les $p(n)$, pour n variant de 10 à 99.

	Chiffres des dizaines									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffres des unités	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	1	2	3	3	3	3	3	3	3
	4	1	2	3	4	4	4	4	4	4
	5	1	2	3	4	5	5	5	5	5
	6	1	2	3	4	5	6	6	6	6
	7	1	2	3	4	5	6	7	7	7
	8	1	2	3	4	5	6	7	8	8
	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ainsi on a :

$$p(10) + p(11) + \dots + p(99) \\ = 9 \times 0 + 17 \times 1 + 15 \times 2 + 13 \times 3 + 11 \times 4 + 9 \times 5 + 7 \times 6 + 5 \times 7 + 3 \times 8 + 1 \times 9 = 285.$$

2.

- Il y a 9 possibilités pour chacun des 3 éléments d'un nombre à 3 chiffres ne comportant que des chiffres de 1 à 9, d'où le résultat : $9 \times 9 \times 9 = 9^3$.
- De la même manière, on obtient : 8^3 nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 2 à 9.
- Les nombres n à 3 chiffres tels que $p(n) = 1$ sont les nombres comportant au moins un chiffre 1 et pas de chiffre 0. SCe sont donc les nombres à 3 chiffres de 1 à 9 dont on exclut tous les nombres ne comportant pas le chiffre 1 qui sont les nombres à 3 chiffres de 2 à 9. D'où le résultat $9^3 - 8^3$.

3. Le même raisonnement que dans 2), nous emmène à conclure qu'il y a $8^3 - 7^3$ nombres n pour lesquels $p(n) = 2$.

4. D'une façon générale, on montre que le nombre des nombres n à 3 chiffres tels que $p(n) = m$ est $(10 - m)^3 - (10 - m - 1)^3$ (avec $i \leq m \leq 9$).

Ainsi :

$$p(100) + p(101) + \dots + p(999) \\ = p(000) + p(001) + \dots + p(999) \\ = (10^3 - 9^3) \times 0 + (9^3 - 8^3) \times 1 + (8^3 - 7^3) \times 2 + (7^3 - 6^3) \times 3 \\ + (6^3 - 5^3) \times 4 + (5^3 - 4^3) \times 5 + (4^3 - 3^3) \times 6 + (3^3 - 2^3) \times 7 \\ + (2^3 - 1^3) \times 8 + (1^3 - 0^3) \times 9 \\ = 9^3 + 8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 \\ = 2025.$$

Exercice n° 2 (Séries S et STI)

Enoncé

Le circuit

On pourra utiliser sans le démontrer les résultats suivants :

Étant donnés deux cercles C_1 et C_2 de même rayon, de centre respectivement O_1 et O_2 et tangents en un point A,

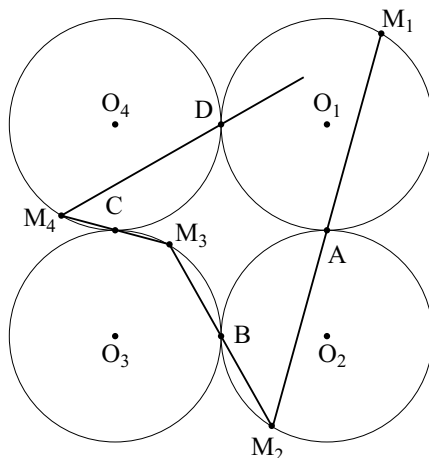
(1) A est le milieu de $[O_1O_2]$;

(2) Si M_1 est un point du cercle C_1 , son symétrique M_2 par rapport à A appartient au cercle C_2 .

La figure ci-dessous représente un circuit formé de quatre anneaux circulaires identiques de rayon r , tangents deux à deux et dont les centres O_1 , O_2 , O_3 et O_4 sont les sommets d'un carré. A, B, C et D sont les points de contact des cercles tangents.

On choisit un point M_1 sur le cercle de centre O_1 et l'on construit successivement M_2 symétrique de M_1 par rapport à A, M_3 symétrique de M_2 par rapport

à B, M_4 symétrique de M_3 par rapport à C, M_5 symétrique de M_4 par rapport à D.



Le but de l'exercice est de montrer que $M_5 = M_1$ et que l'aire $\mathcal{A}$ de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à l'aire du carré $O_1O_2O_3O_4$.

1. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.
2. Démontrer que les points M_3 , M_1 et M_5 sont alignés et que $M_5 = M_1$.
3. Dans la figure tracée ci-dessus, $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère. Préciser pour quelle(s) position(s) de M_1 cela n'est pas le cas.
4. Dans cette question, on se place dans le cas où $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère.
 - a. Montrer que les droites (M_1M_3) et (M_2M_4) sont perpendiculaires.
 - b. Calculer en fonction de r , M_1M_3 et M_2M_4 .
 - c. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à $4r^2$.
5. Ce résultat demeure-t-il valable dans les cas particuliers de la question 3 ?

Exercice n° 3 (Autres séries)

Enoncé

Le circuit

On pourra utiliser sans le démontrer les résultats suivants :

Étant donnés deux cercles C_1 et C_2 de même rayon et de centre respectivement O_1 et O_2 et tangents en un point A,

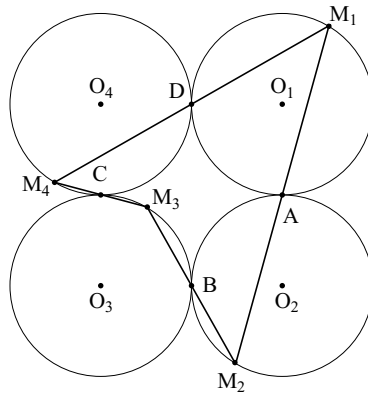
(1) A est le milieu de $[O_1O_2]$;

(2) Si M_1 est un point du cercle C_1 , son symétrique M_2 par rapport à A appartient au cercle C_2 .

La figure ci-dessous représente un circuit formé de quatre anneaux circulaires identiques de rayon r , tangents deux à deux et dont les centres O_1 , O_2 , O_3 et O_4 sont les sommets d'un carré. A, B, C et D sont les points de contact des cercles tangents.

On choisit un point M_1 sur le cercle de centre O_1 et l'on construit successivement M_2 symétrique de M_1 par rapport à A, M_3 symétrique de M_2 par rapport à B, M_4 symétrique de M_3 par rapport à C, M_5 symétrique de M_4 par rapport à D.

On admet que le circuit se ferme, c'est-à-dire que M_1 est le symétrique de M_4 par rapport à D.



Le but de l'exercice est de montrer que l'aire de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à l'aire du carré $O_1O_2O_3O_4$.

- Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.
- Dans la figure tracée ci-dessus, $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère. Préciser pour quelle(s) position(s) de M_1 cela n'est pas le cas.
- Dans cette question, on se place dans le cas où $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère.
 - Démontrer que les droites (M_1M_3) et (M_2M_4) sont perpendiculaires.
 - Calculer M_1M_3 et M_2M_4 .
 - Montrer que l'aire A de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à $4r^2$.
- Ce résultat demeure-t-il valable dans les cas particuliers de la question 3.

Solution des exercices 2 et 3

1) Dans le triangle $O_1O_2O_3$, les points A et B sont les milieux respectifs des côtés $[O_1O_2]$ et $[O_2O_3]$, d'après le théorème des milieux, on en déduit que : $AB = \frac{1}{2}O_1O_3$ et $(AB) \parallel (O_1O_3)$.

Par un raisonnement analogue, en considérant les triangles $O_2O_3O_4$; $O_3O_4O_1$ et $O_4O_1O_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} BC &= \frac{1}{2} O_2O_4 \text{ et } (BC) // (O_2O_4). \\ CD &= \frac{1}{2} O_1O_3 \text{ et } (CD) // (O_1O_3). \\ DA &= \frac{1}{2} O_2O_4 \text{ et } (DA) // (O_2O_4). \end{aligned}$$

On sait que $O_1O_2O_3O_4$ est un carré, ainsi on a :

$$O_1O_3 = O_2O_4 \text{ et } (O_1O_3) \perp (O_2O_4).$$

Par conséquent : $AB = BC = CD = DA$ et $(AB) \perp (BC)$.

ABCD est donc un carré.

2) Dans le triangle $M_1M_2M_3$, les points A et B sont les milieux respectifs des côtés $[M_1M_2]$ et $[M_2M_3]$, d'après le théorème des milieux, on en déduit le résultat vectoriel : $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{M_3M_1}$.

De la même manière, puisque C et D sont les milieux respectifs des côtés $[M_3M_4]$ et $[M_4M_5]$ du triangle $M_3M_4M_5$, on obtient : $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{M_3M_5}$.

Or $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{M_3M_1} = \overrightarrow{M_3M_5}$ et par conséquent $M_1 = M_5$.

3) $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère sauf dans les cas où deux des points M_1 , M_2 , M_3 et M_4 au moins, sont confondus. On remarque que M_1 et M_3 ne peuvent être confondus car ils appartiennent à deux cercles disjoints et il en est de même pour M_2 et M_4 .

Cette remarque, nous permet également d'exclure les cas où trois points et les quatre points sont confondus.

Il reste donc, les quatre cas possibles qui sont : $M_1 = M_2$ ou $M_2 = M_3$ ou $M_3 = M_4$ ou $M_1 = M_4$.

Dans ces quatre cas $M_1M_2M_3M_4$ est un triangle et M_1 appartient à l'une des droites (O_1O_2) ou (O_1O_4) .

4)

- a) Dans les triangles $O_1O_2O_3$ et $M_1M_2M_3$, (AB) est une droite des milieux.
Donc : $(AB) // (O_1O_3)$ et $(AB) // (M_1M_3)$.
Par conséquent $(M_1M_3) // (O_1O_3)$.

De la même manière, on montre que : $(M_2M_4) // (O_2O_4)$.

Or $(O_1O_3) \perp (O_2O_4)$, donc $(M_1M_3) \perp (M_2M_4)$.

- b) Toujours à l'aide du théorème des milieux on a :

$$AB = \frac{1}{2} O_1 O_3 \text{ et } AB = \frac{1}{2} M_1 M_3. \text{ Donc } M_1 M_3 = O_1 O_3$$

$$BC = \frac{1}{2} O_2 O_4 \text{ et } BC = \frac{1}{2} M_2 M_4. \text{ Donc } M_2 M_4 = O_2 O_4.$$

$$\text{Or, } O_1 O_3 = O_2 O_4 \text{ et } O_1 O_3 = \sqrt{(2r)^2 + (2r)^2} = 2\sqrt{2} \times r.$$

$$\text{Donc } M_1 M_3 = M_2 M_4 = 2\sqrt{2} \times r$$

- c) En remarquant que la longueur $M_2 M_4$ est la somme des hauteurs des triangles $M_1 M_2 M_3$ et $M_1 M_3 M_4$ issues respectivement de M_2 et M_4 On a donc : $\mathcal{A} = M_1 M_3 \times M_2 M_4 = 4r^2$.

5) On considère, par exemple, le cas où $M_1 = M_2$. Dans ce cas la figure $M_1 M_2 M_3 M_4$ n'est autre que le triangle $AM_3 M_4$. Les points B et D seront les milieux respectifs des côtés $[AM_3]$ et $[AM_4]$, donc, en utilisant encore, le théorème des milieux, on obtient : $M_3 M_4 = 2BD$ et $(M_3 M_4) \parallel (BD)$.

Or $(AC) \perp (BD)$, donc $(AC) \perp (M_3 M_4)$ ce qui nous permet de déduire que $[AC]$ est la hauteur, issue de A, du triangle $AM_3 M_4$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= AC \times M_3 M_4 \\ &= \frac{1}{2} AC \times 2BD \\ &= 4r^2. \end{aligned}$$

Le résultat reste identique pour les autres cas.