

MONTPELLIER

Exercice n° 1 (Série S)

Énoncé

2008 dans tous ses états

On construit une suite de nombres rangés dans un ordre croissant, constitués des seuls chiffres 0, 2 et 8.

Le premier nombre, de rang 1, est ainsi 0, le second, de rang 2, est 2, le troisième, de rang 3, est 8 et ainsi de suite.

Le tableau suivant donne les dix premiers éléments de cette suite :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre	0	2	8	20	22	28	80	82	88	200

1. Quel est le plus grand nombre qui s'écrit avec seulement un 0, un 2, et un 8 ? Quel est son rang ?
2. Quel est le rang, en fonction de n , d'un nombre qui s'écrit avec n chiffres 8 ?
3. Quel est le rang du nombre 2008 ?
4. Comment s'écrit le nombre de rang 2008 ?

Solution

Si un nombre n est de rang r , il y a r nombres inférieurs ou égaux à n s'écrivant avec des 0, 2 ou 8.

1. Le plus grand nombre qui s'écrit avec seulement un 0, un 2 et un 8 est 820. En continuant le tableau de l'énoncé on a :

Rang	1	2	3
Nombre	0	1	2

Nombres à 1 chiffre

Rang	4	5	6	7	8	9
Nombre	20	22	28	80	82	88

Nombres à 2 chiffres

Rang	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre	200	202	208	220	222	228	280	282	288

Rang	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Nombre	800	802	808	820	822	828	880	882	888

Nombres à 3 chiffres

On constate que 820 est de rang 22.

2. On constate que :
- | | | | |
|-----|----------------|-------------|------------|
| 8 | (1 chiffre 8) | est de rang | $3 = 3^1$ |
| 88 | (2 chiffres 8) | est de rang | $9 = 3^2$ |
| 888 | (3 chiffres 8) | est de rang | $27 = 3^3$ |

Le nombre constitué de n chiffres 8 étant le plus grand nombre de n chiffres, son rang sera donc le nombre de nombres que l'on peut fabriquer avec seulement les chiffres 0,2 ou 8. Si A_n est un nombre de n chiffres, on peut l'écrire $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ où a_k est un des chiffres 0,2 ou 8.

Pour chaque a_k il y a donc 3 possibilités donc le nombre de nombres à n chiffres est $3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^n$. Le nombre constitué de n chiffres 8 est donc de rang 3^n .

3. En reprenant le tableau donné dans l'énoncé mais en commençant au rang 27, on a

Rang	27	28	29	30
Nombre	888	2 000	2 002	2 008

On en déduit que le nombre 2 008 a pour rang 30.

4. On a $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$ et $729 < 2008 < 2187$, donc le nombre de rang 2 008 est entre 888 888 et 8 888 888.

Entre...et...	Il y a...nombres	Rang atteint
0 et 888 888	$3^6 = 729$	729
2 000 000 et 2 888 888	729	$729 + 729 = 1\,458$
8 000 000 et 8 088 888	243	$1\,458 + 243 = 1\,701$
8 200 000 et 8 288 888	243	$1\,701 + 243 = 1\,944$
8 800 000 et 8 800 888	27	$1\,944 + 27 = 1\,971$
8 802 000 et 8 802 888	27	$1\,971 + 27 = 1\,998$
8 808 000 et 8 808 088	9	$1\,998 + 9 = 2\,007$

Le nombre 8 808 088 est donc de rang 2 007, par conséquent, le nombre de rang 2 008 est le nombre 8 808 200.

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Quadrisection

1. Construire un triangle rectangle ABC tel que la hauteur, la bissectrice et la médiane issues de A partagent, dans cet ordre, l'angle de sommet A en quatre angles de même mesure. Vous préciserez les mesures des trois angles du triangle.
2. Prouver qu'un triangle ayant un de ses angles partagé en 4 angles de même mesure par la hauteur, la bissectrice et la médiane issues du sommet de cet angle, dans cet ordre, est obligatoirement rectangle.

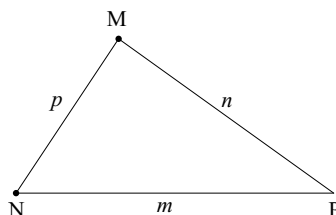
On rappelle les formules suivantes :

$$\text{Aire}(\text{MNP}) = \frac{1}{2}mn \sin \widehat{P}$$

avec $m = PN$, $n = PM$ et $\widehat{P} = \widehat{MPN}$

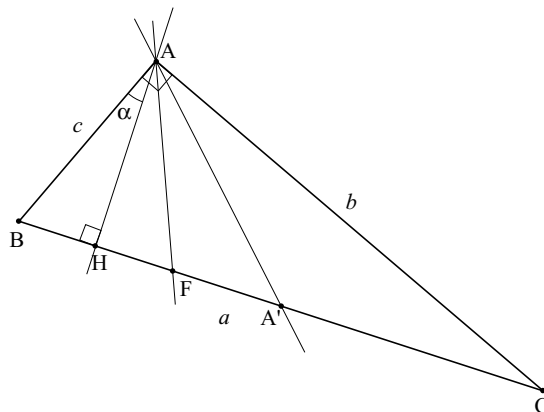
$$\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$$

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Solution

1. Figure :



2. Soient H le pied de la hauteur issue de A, A' le milieu de $[BC]$ et F le point d'intersection entre la bissectrice issue de A et la droite (BC) .

On pose : $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$; $h = AH$; $m = AA'$;
 $\alpha = \widehat{BAH} = \widehat{HAF} = \widehat{FAA'} = \widehat{A'AC}$.

On en déduit : $3\alpha = \widehat{BAA'} = \widehat{HAC}$

$$4\alpha = \widehat{BAC}, \text{ or } 0 < \widehat{BAC} < \pi, \quad 0 < 4\alpha < \pi \quad (0)$$

Et aussi que : $h = c \times \cos(\alpha)$; dans le triangle BHA, rectangle en H.

$$h = b \times \cos(3\alpha); \text{ dans le triangle HAC, rectangle en H.}$$

D'où l'égalité : $c \times \cos(\alpha) = b \times \cos(3\alpha) \quad (1)$

La droite (AA') étant la médiane issue de A dans la triangle ABC, l'aire du triangle ABA' est donc égale à l'aire du triangle AA'C. Ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\frac{cm \sin(3\alpha)}{2} = \frac{bm \sin(\alpha)}{2}$$

ce qui est équivalent à : $c \sin(3\alpha) = b \sin(\alpha) \quad (2)$

Le produit des équations (1) et (2) donne :

$$bc \cos(\alpha) \sin(\alpha) = bc \cos(3\alpha) \sin(3\alpha) \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) = 2 \cos(3\alpha) \sin(3\alpha)$$

Et comme :

$$\sin(2a) = 2 \cos(a) \sin(a)$$

$$(3) \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \sin(6\alpha)$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 6\alpha + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2\alpha = \pi - 6\alpha + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3) \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha = 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 8\alpha = \pi + 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha = -2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 4\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En respectant la condition (0), la première équation n'a pas de solution, seule la deuxième admet une solution pour $k = 0$. Cette solution est : $\alpha = \frac{\pi}{8} \text{ rad} = 22,5^\circ$

Donc les triangles ABC solutions du problème sont les triangles rectangles en A ayant les mesures angulaires déterminées à la question 1.

Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Cocktails

On dispose de trois récipients **A**, **B** et **C** de 2 litres chacun.

Le récipient **A** contient un litre d'un cocktail constitué de 60% de jus d'ananas et de 40% de jus de banane.

Le récipient **B** contient un litre d'un cocktail constitué de 40% de jus de banane et de 60% de jus de mangue.

Le récipient **C** contient un litre d'un cocktail constitué de 20% de jus d'ananas, de 10% de jus de banane et de 70% de jus de mangue.

On effectue deux manipulations successives :

1^{ère} manipulation : On verse la moitié du cocktail contenu dans le récipient **A** dans le récipient **B** et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

2^{ème} manipulation : On verse alors un tiers du mélange obtenu dans le récipient **B** dans le récipient **C** et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

1) A l'issue de ces deux manipulations : Quel est le volume de jus de fruits contenu dans chaque récipient ?

Quel est la proportion de jus d'ananas, de jus de banane et de jus de mangue dans chaque récipient ?

2) A l'issue de ces deux manipulations, quelle proportion du mélange contenu dans le récipient **B** et quelle proportion du mélange contenu dans le récipient **C** faut-il verser dans le récipient **A** pour que dans le récipient **A**, il y ait autant de jus d'ananas que de jus de banane que de jus de mangue ?

Solution

1) Chaque récipient contenant 1 litre, donnons dans les tableaux suivants la répartition dans chaque récipient à l'issue de chaque manipulation.

A l'issue de la 1^{ère} manipulation :

Contenu en litre	Récipient A	Récipient B	Récipient C
Ananas	$1 \times 0,5 \times 0,6 = 0,3$	$0 + 1 \times 0,5 \times 0,6 = 0,3$	$1 \times 0,2 = 0,2$
Banane	$1 \times 0,5 \times 0,4 = 0,2$	$1 \times 0,4 + 1 \times 0,5 \times 0,4 = 0,6$	$1 \times 0,1 = 0,1$
Mangue	0	$1 \times 0,6 = 0,6$	$1 \times 0,7 = 0,7$
Total	0,5	1,5	1

A l'issue de la 2^{ème} manipulation (en retirant un tiers du récipient **B**, il en reste deux tiers)

Contenu en litre	Récipient A	Récipient B	Récipient C
Ananas	0,3	$0,3 \times 2/3 = 0,2$	$0,2 + 0,3 \times 1/3 = 0,3$
Banane	0,2	$0,6 \times 2/3 = 0,4$	$0,1 + 0,6 \times 1/3 = 0,3$
Mangue	0	$0,6 \times 2/3 = 0,4$	$0,7 + 0,6 \times 1/3 = 0,9$
Total	0,5	1	1,5

A l'issue de la 2^{ème} manipulation, les volumes contenus sont donc :

dans le récipient **A** : 0,5 litre

dans le récipient **B** : 1 litre

dans le récipient **C** : 1,5 litre

A l'issue de la 2^{ème} manipulation, les proportions des différents jus de fruits sont

Dans le récipient **A** : ananas : $0,3/0,5 = 0,6$ soit 60%.

banane : $0,2/0,5 = 0,4$ soit 40%.

mangue : 0%.

Dans le récipient **B** : ananas : 20%.

banane : 40%.

mangue : 40%.

Dans le récipient **C** : ananas : $0,3/1,5 = 0,2$ soit 20%.

banane : $0,3/1,5 = 0,2$ soit 20%.

mangue : $0,9/1,5 = 0,6$ soit 60%.

2) Notons p la proportion extraite du récipient **B** et q celle du récipient **C**. On cherche p et q tels que :

$$0,3 + p \times \underset{\text{ananas}}{0,2} + q \times \underset{\text{banane}}{0,3} = 0,2 + p \times \underset{\text{banane}}{0,4} + q \times \underset{\text{mangue}}{0,3} = 0 + p \times \underset{\text{mangue}}{0,4} + q \times 0,9$$

$$\text{soit } \begin{cases} 0,1 = 0,2p \\ 0,2 = 0,6q \end{cases} \quad \text{d'où } p = 1/2 \text{ et } q = 1/3.$$

Il faut verser dans le récipient **A**, la moitié du mélange contenu dans le récipient **B** et le tiers du mélange contenu dans le récipient **C** pour qu'il y ait la même proportion des trois jus de fruits dans le récipient **A**.

Exercice n° 4 (Séries autres que S)

Enoncé

Mini-sudoku (à rapprocher de Lille - ex. 3)

Dans le mini-sudoku, on complète une grille formée de 4 carrés 2×2 avec les chiffres 1, 2, 3, 4 de telle façon que, sur chaque ligne, chaque colonne et dans chacun des 4 carrés 2×2 , il n'y ait qu'une seule fois chaque chiffre.

Exemple :

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>A</i>	1	2	3	4
<i>B</i>	3	4	1	2
<i>C</i>	2	1	4	3
<i>D</i>	4	3	2	1

1) Résoudre le problème ci-dessous, c'est-à-dire compléter la grille en respectant les règles du mini-sudoku. Expliquer le raisonnement.

On pourra utiliser la notation naturelle des cases pour expliquer le raisonnement. Par exemple, Aa désigne la case contenant le 1 déjà placé, la ligne B contient le 2 déjà placé et la colonne b contient le 3 déjà placé, enfin le carré CDcd contient le 4 déjà placé.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>A</i>	1			
<i>B</i>			2	
<i>C</i>		3		
<i>D</i>				4

2) Si on retire le chiffre 4 du tableau de la question 1), on obtient le tableau ci-dessous ; déterminer les cases dont le remplissage reste imposé.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>A</i>	1			
<i>B</i>			2	
<i>C</i>		3		
<i>D</i>				

3) Démontrer que si on retire un quelconque des 4 chiffres du tableau de la question 1), le problème admet alors toujours 3 solutions et 3 seulement.

Solution

1)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>
<i>A</i>	1	2	4	3
<i>B</i>	3	4	2	1
<i>C</i>	4	3	1	2
<i>D</i>	2	1	3	4

Da contient forcément un 2 à cause des cases Aa , Cb et Dd .

Ca contient forcément un 4 à cause des cases Aa , Cb et Da .

La dernière case libre de la colonne a est Ba qui contient donc un 3.

La figure étant symétrique, on complète de façon analogue le pourtour de la grille.

Les deux cases restantes peuvent par exemple être remplies en considérant que ce sont les dernières des colonnes b et c .

2) Grille des cases imposées :

	a	b	c	d
A	1	2		
B	3	4	2	1
C		3	1	
D		1		

Les 3 cases pré-remplies imposent un 4 en Bb . Les cases Aa , Bb et Cb imposent un 2 en Ab .

La dernière case libre du carré $ABab$ est Ba qui contient donc un 3.

La dernière case libre de la ligne B est Bd qui contient donc un 1.

La dernière case libre de la colonne 2 est Db qui contient donc un 1.

Les deux 1 que l'on vient de placer ne laissent qu'une case possible pour le 1 du carré $CDcd$, c'est la case Cc qui contient donc un 1.

A partir de là plusieurs solutions sont possibles, par exemple la réponse du 1) et les grilles :

	a	b	c	d
A	1	2	3	4
B	3	4	2	1
C	4	3	1	2
D	2	1	4	3

	a	b	c	d
A	1	2	4	3
B	3	4	2	1
C	2	3	1	4
D	4	1	3	2

Ces trois solutions n'ayant aucun autre nombre en commun que ceux imposés ci-dessus, il y a donc 9 cases imposées dont les 3 de départ.

3) Vérifions que si on retire le 4 de la grille initiale, les 3 solutions précédentes sont les seules.

Partons de la grille des cases imposées et supposons qu'il y a un 4 en Dd . La seule grille possible est la réponse du 1). Cela a été justifié à la question 1).

Supposons maintenant qu'il y a un 3 en Dd . Les cases Bc, Cc, Dd imposent un 4 en Dc .

La dernière case libre du carré $CDcd$ est Cd qui contient donc un 2.

La dernière case libre de la ligne D est Da qui contient donc un 2.

La dernière case libre de la colonne 3 est Ac qui contient donc un 3.

La dernière case libre de la ligne A est Ad qui contient donc un 4.

La dernière case libre de la ligne C est Ca qui contient donc un 4.

On obtient la première grille proposée à la question 2).

Supposons maintenant qu'il y a un 2 en Dd .

La situation est symétrique de la précédente et on obtient la seconde grille proposée à la question 2).

Il n'y a pas d'autre possibilité, le 1 étant proscrit en Dd à cause du 1 imposé en Cc .

Le problème est donc résolu lorsque l'on retire le 4 en Dd .

Par symétrie, le problème est identique si on retire le 1 en Aa .

Concernant le retrait du 2 ou du 3, il suffit de noter que si on permute 2 lignes ou 2 colonnes voisines sur le bord de la grille, on ne change pas le nombre de solutions car on ne modifie pas le contenu global des carrés et des autres lignes et colonnes.

En permutant les colonnes a et b ainsi que les colonnes c et d , puis les lignes A et B ainsi que les lignes C et D , on obtient :

	a	b	c	d
A				2
B		1		
C			4	
D	3			

Ce qui, après rotation d'un quart de tour, montre que le retrait du 2 et le retrait du 3 se ramènent aux deux cas précédents.

Il y a donc toujours exactement 3 solutions contenant 9 cases identiques.